

MOCANU FLORENTINA

MECANICA MEDIILOR
DEFORMABILE

1. IDENTIFICAREA SOLICITARILOR DINTR-UN CORP STABILIREA TENSIUNILOR

Intr-un sistem triortogonal de axe *principal central* cu originea în G (centrul de greutate al secțiunii transversale) în care axa Ox coincide cu axa geometrică a corpului componentele eforturilor după cele trei axe sunt prezentate *figura 1*:

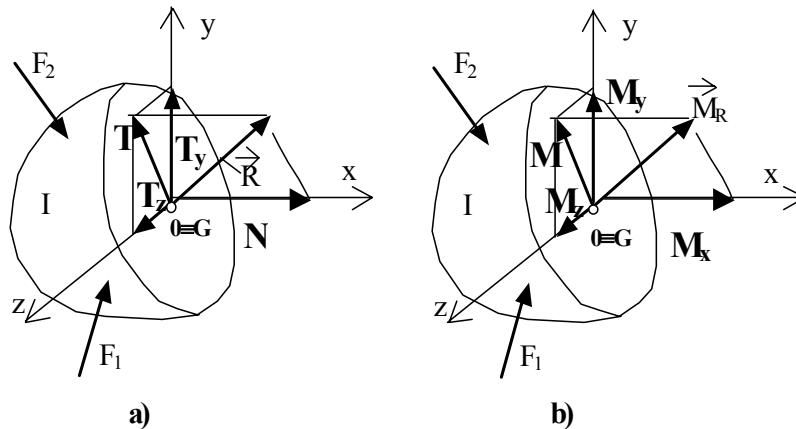


Figura 1.

- componenta N , *normală la secțiune*, se numește **forță axială** și apare în cazul solicitărilor de tracțiune sau compresiune (solicitări axiale);
- componentele T_y și T_z sunt în *planul secțiunii* și se numesc **forțe tăietoare**;
- componenta M_x este *normală* pe secțiune, apare la torsiunea (răsucirea) barelor și se numește **moment de torsiune**;
- componentele M_z și M_y sunt în *planul secțiunii*, se numesc **momente de încovoiere (momente încovoietoare)** și apar la solicitarea de încovoiere.

Intr-o secțiune a corpului cele șase componente ale eforturilor se pot determina după cum urmează:

- **forța axială** N este egală cu suma algebrică a tuturor proiecțiilor forțelor exterioare pe axa Ox (axa barei);

- **forțele tăietoare** T_y și T_z sunt egale cu suma algebrică a proiecțiilor tuturor forțelor exterioare pe axa Oy și respectiv Oz ;

- **momentul de torsiune** M_x este egal cu suma algebrică a tuturor cuplurilor exterioare dirijate după axa Ox ;

- **momentele încovoietoare** M_z și M_y sunt egale cu suma algebrică a tuturor momentelor exterioare față de axa Oy și respectiv Oz .

Eforturile au, de obicei, intensități diferite în diferite secțiuni ale corpului solicitat. Determinarea acestora constituie una dintre problemele principale în practica ingineriască. Dacă se cunosc valorile eforturilor atunci se poate stabili care sunt cele mai solicitate puncte ale corpului și pe această bază se poate aprecia dacă corpul rezistă sau nu sarcinilor aplicate sau se pot calcula dimensiunile corpului astfel încât rezistența acestuia să fie asigurată.

Utilizând definițiile de mai sus se pot stabili eforturile în orice secțiune a corpului și se pot trasa curbele lor de variație, numite **diagrame de eforturi**.

Pentru trasarea acestor diagrame se folosesc următoarele **reguli de semne** (figura 2). Prin urmare:

- **forța axială** este considerată pozitivă atunci când produce o solicitare de întindere în secțiunea considerată și negativă atunci când produce o solicitare de compresiune;

- **forța tăietoare** este considerată pozitivă atunci când acționează de jos în sus în stânga secțiunii sau de sus în jos în dreapta secțiunii;

- **momentul încovoietor** este considerat pozitiv când grinda este deformată încât concavitatea curbei este orientată în sus; în situație contrară momentul încovoietor este negativ.

Aceste reguli de semne sunt obligatorii.

*Forță axială
Forță tăietoare
Moment încovoietor*

POZITIVE

*Forță axială
Forță tăietoare
Moment încovoietor*

NEGATIVE

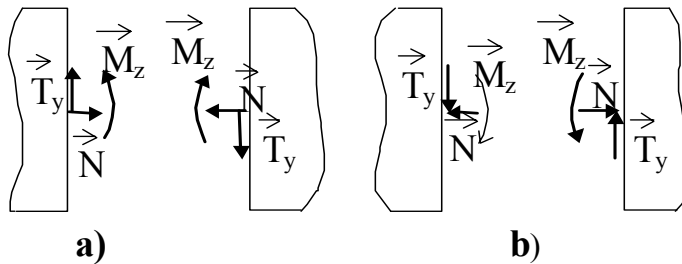


Figura 2.

Tensiunile care apar într-un corp ca urmare a sollicitărilor exterioare se pot descompune în două componente (vezi figura 3):

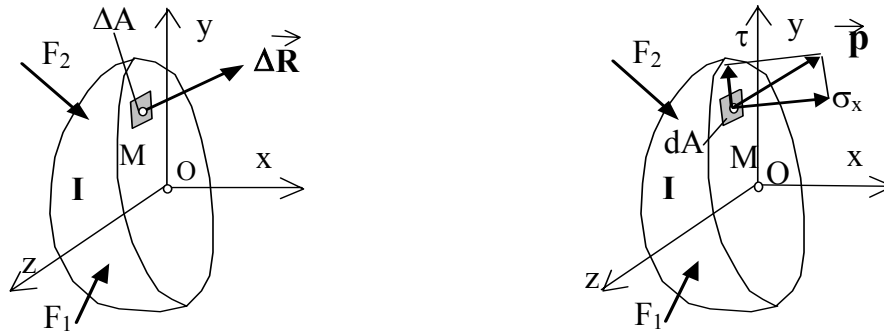


Figura 3

- pe direcția normalei în componenta σ_x , numită **tensiune normală** (orientată de direcția axei Ox);

- pe planul secțiunii în componenta τ , numită **tensiune tangențială**.

La rândul său, componenta τ poate fi descompusă în planul yOz , (la care Ox este normală) obținându-se componentele τ_{xy} și τ_{xz} (figura 4) care sunt paralele cu axele Oy și respectiv Oz . Pentru cele două tensiuni tangențiale semnificația indicilor este următoarea: primul indice desemnează axa normală la planul secțiunii (axa Ox) iar al doilea axa cu care tensiunea este paralelă (axele Oy și respectiv Oz).

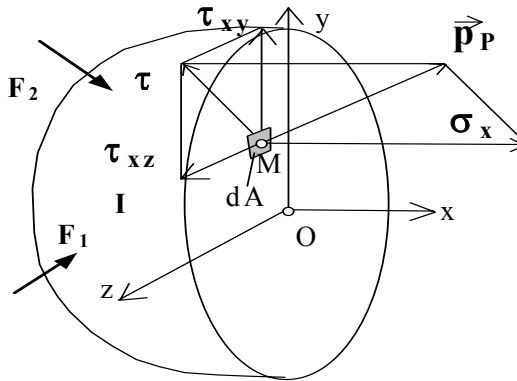


Figura 4.

Cele mai simple cazuri întâlnite în practică sunt cele în care pe secțiunea corpului apare o singură componentă a eforturilor și respectiv tensiunilor. Acestea se numesc **solicitări simple**.

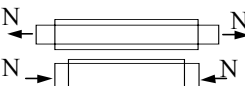
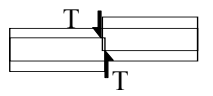
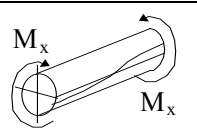
Există patru solicitări simple: *solicitările axiale* (tracțiune sau compresiune), *forfecare*, *torsiune* și *încovoiere* (vezi tabelul 1).

Tracțiunea și compresiunea se numesc *solicitări axiale* deoarece suporturile forțelor sunt dirijate tangențial la axa geometrică a barei. La acestea diferă între ele numai semnul eforturilor, tensiunilor și alungirilor specifice: pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresiune.

La comprimarea barelor zvelte (lungi în raport cu dimensiunea secțiunii transversale), peste anumite valori ale forței bara părăsește forma rectilinie și apare fenomenul de *flambaj* (pierderea stabilității). *Flambajul nu este o solicitare*.

Forfecarea este produsă de două forțe egale și de sens contrar ce acționează pe un suport perpendicular pe axa geometrică a corpului.

Tabelul 1

Solicitarea	Schema de solicitare	Efort nenul	Tensiune
Tracțiune		$N > 0$	$\sigma > 0$
Compresiune		$N < 0$	$\sigma < 0$
Forfecare (Tăiere)		T_y (sau T_z)	τ
Torsiune (Răsucire)		M_x	τ
Încovoiere		M_z (sau M_y)	σ

Solicitarea de **torsiune** este produsă de cupluri de forțe conținute în plane perpendiculare pe axa geometrică a corpului.

Solicitarea de **încovoiere** poate fi **încovoiere pură** și **încovoiere simplă**. Prin **încovoiere pură** se înțelege deformarea unei grinzi produsă de un sistem de forțe static echivalente care produc în secțiunea transversală un moment încovoiator, la cărui vector este dirijat după una din axele principale ale secțiunii transversale. În cazul solicitării de **încovoiere simplă** în secțiunea transversală a grinzii apare pe lângă un moment încovoiator și o forță tăietoare.

În practică se întâlnesc și ***solicitățile compuse***. Acestea se produc atunci când în secțiunea corpului apar simultan cel puțin două componente ale eforturilor și tensiunilor.

Solicitarea axială

Un corp este solicitat la tracțiune simplă (uniaxială) sau la compresiune atunci când este solicitat doar de forțe exterioare având direcția axei.

În cazul în care suportul forțelor exterioare nu coincide cu axa barei, dar este paralel cu ea, bara va fi supusă, în afara solicitării de întindere sau compresiune și la încovoiere.

În ceea ce privește solicitarea de compresiune a barelor de lungime mare, trebuie făcută precizarea că este posibil să apară fenomenul de *flambaj longitudinal* (pierderea stabilității înainte ca tensiunea de compresiune să atingă vreo stare limită). Regula care trebuie reținută este aceea că nu se calculează la compresiune barele a căror lungime întrece de cinci ori dimensiunea cea mai mică a secțiunii transversale.

Pentru o bară confecționată dintr-un material liniar-elastic, supusă la solicitări axiale, relația de calcul pentru tensiune este:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (1)$$

unde: σ_x – tensiunea normală într-o secțiune curentă a barei;

N - forța axială în secțiunea respectivă;

A – aria secțiunii transversale a barei.

Forța axială poate fi constantă sau variabilă în lungul barei. Dacă forța axială este variabilă în lungul axei barei, atunci este necesar, pentru studiul solicitării barei, să se reprezinte diagrama forțelor axiale. Într-o secțiune curentă a barei *forța axială N* este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa Ox (axa barei) a tuturor forțelor exterioare situate la stânga sau la dreapta secțiunii considerate. *Forța*

axială este considerată *pozitivă* atunci când produce o solicitare de întindere în secțiunea considerată (dacă pleacă din secțiune) și *negativă* atunci când produce o solicitare de compresiune (dacă intră în secțiune). Modul de construire a diagramei cuprinde mai multe etape, prezentate în continuare:

- *figurarea și calculul reacțiunilor;*
- *impărțirea barei în regiuni și secționarea barei;*
- *se scrie în fiecare secțiune expresia forței axiale ținând cont de definiția acesteia și de convenția de semne precizate anterior;*
- *se studiază variația forței axiale, se trasează diagrama de variație și se verifică diagrama.*

Observație

Ca regulă generală, care permite și o verificare a diagramei N, în dreptul fiecărei forțe concentrate de pe bară, în diagrama N se produce un salt egal în modul cu valoarea forței respective.

Calculul de dimensionare se face la proiectarea pieselor și permite stabilirea dimensiunilor secțiunii transversale a piesei solicitate axial. Dimensionarea prin *metoda tensiunilor admisibile* presupune că tensiunile maxime din piesă (luate în modul) nu vor depăși pe cele admisibile conform relației:

$$\sigma_{x,\max} \leq \sigma_a \quad (2)$$

Ținând cont și de *relația (1)* formula de dimensionare este:

$$A_{\text{nec}} = \frac{N}{\sigma_a} \quad (3)$$

Calculul de verificare se face pentru piese la care se cunosc dimensiunile secțiunii transversale. De obicei, acest calcul constă în verificarea inegalității din *relația (2)*. Dacă inegalitatea se verifică, piesa rezistă la sarcinile propuse.

O altă variantă a acestui calcul presupune determinarea sarcinii maxime pe care o poate suporta piesa, numită *sarcină capabilă*. Calculul se face cu o relație de forma:

$$N_{\text{cap}} = A\sigma_a \quad (4)$$

Solicitarea de torsiune (răsucire)

O bară dreaptă este solicitată la torsiune (răsucire) dacă efortul din secțiunea transversală este un moment M_x care, în reprezentare vectorială, este dirijat după axa Ox (aleasă convențional pe direcția axei barei).

Practic are loc deformarea barei sub acțiunea unor *cupluri de forțe cuprinse în plane perpendiculare pe axa geometrică a acesteia, iar suporturile forțelor nu intersectează axa.*

Tensiunea tangentială pentru cazul *barelor drepte de secțiune circulară și circulară inelară* supuse **la torsiune (răsucire)** se calculează cu relația:

$$\tau(r) = \frac{M_x}{I_p} r \quad (5)$$

Pe conturul barei, pentru $r = R$, se poate scrie:

$$\tau(R) = \frac{M_x}{I_p} R = \frac{M_x}{\frac{I_p}{R}} \quad (6)$$

Tensiunea tangențială maximă se calculează cu relația:

$$\tau_{\text{max}} = \tau(R) = \frac{M_x}{W_p} \quad (7)$$

unde: $M_x = M_t$ - momentul de torsiune;

I_p - momentul de inerție polar dat de *relațiile (8), (9)*;

W_p - modulul de rezistență polar dat de *relațiile (8), (9)*.

- pentru secțiunea circulară: $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$; $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ (8)

- pentru secțiunea circulară inelară: $I_p = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32}$; $W_p = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{16d_e}$ (9)

Relația (5) arată că tensiunea tangențială este distribuită liniar pe direcția razei: tensiunea tangențială este nulă în centru de greutate al barei (la $r = 0$), variază liniar cu raza r și este maximă pe conturul secțiunii, așa cum este reprezentat în figura 5a pentru barelor drepte de secțiune circulară și în figura 5b pentru barelor drepte de secțiune circulară inelară..

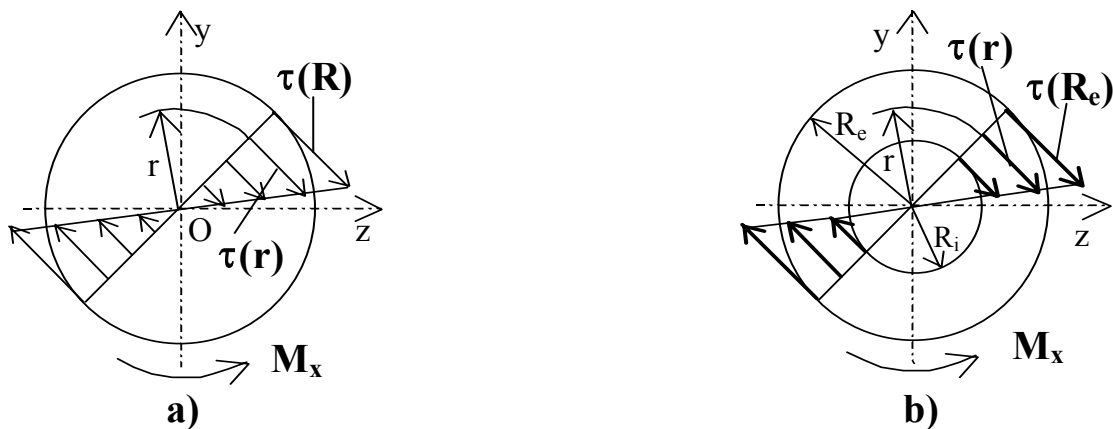


Figura 5

Pentru trasarea diagramei momentului de torsiune se parcurg următoarele etape:

- *determinarea reacțiunilor*

Reacțiunea care apare în încastrare este tot un moment de torsiune, aceasta putând fi determinată din ecuația de echilibru (pentru barele în consolă etapa figurării și determinării reacțiunilor este opțională. La aceste bare calculul reacțiunilor poate fi evitat dacă, după secționare, se reține mereu porțiunea de bară dinspre capătul liber al barei).

- *impărțirea corpului în regiuni și efectuarea secțiunilor în fiecare regiune*

- se scrie în fiecare secțiune expresia momentului de torsiune ținând cont de definiția acesteia (la scrierea expresiei momentului de torsiune nu se impune o anumită convenție de semne);
- se studiază variația momentului de torsiune, se trasează diagrama de variație și se verifică diagrama.

În secțiunea în care asupra corpului acționează un moment concentrat (sarcină sau reacțiune), în diagrama M_x apare un salt, egal în modul cu acel moment. Această observație permite o verificare rapidă a diagramei.

Solicitarea de încovoiere

Solicitarea de încovoiere apare atunci când toate încărcările acționează într-un plan de simetrie longitudinal al grinzii sau în lipsa acestuia într-un plan ce conține una din axele centrale principale de inerție.

Solicitarea de încovoiere poate fi *încovoiere pură* și *încovoiere simplă*. Prin *încovoiere pură* se înțelege deformarea unei grinzi produsă de un sistem de forțe static echivalente care produc în secțiunea transversală un moment încovoiător, la cărui vector este dirijat după una din axele principale ale secțiunii transversale. În cazul solicitării de *încovoiere simplă* în secțiunea transversală a grinzii apare pe lângă un moment încovoiător și o forță tăietoare. Corespunzător celor două eforturi la solicitarea de *încovoiere simplă* apar două tensiuni: o tensiune normală dată de ***formula lui Navier*** și o tensiune tangentială dată de ***formula lui Juravski***.

Pentru un corp solicitat de efortul M_z orientat după axa Oz (axă centrală și principală de inerție a secțiunii transversale) ***relația lui Navier*** are următoarea formă:

$$\sigma_z(x, y) = \frac{M_z(x)}{I_z} y \quad (10)$$

unde: I_z - momentul de inerție al întregii figuri, față de axa Oz .

Valoarea momentului $M_z(x)$ se determină din diagrama de efort.

Relatia (10) arată faptul că tensiunea normală în cazul solicitării de încovoiere este *nulă* în planul neutru, care conține și axa neutră ($y = 0$) și este *maximă* sau *minimă* pe fața inferioară și respectiv superioară a grinzilor (figura 6).

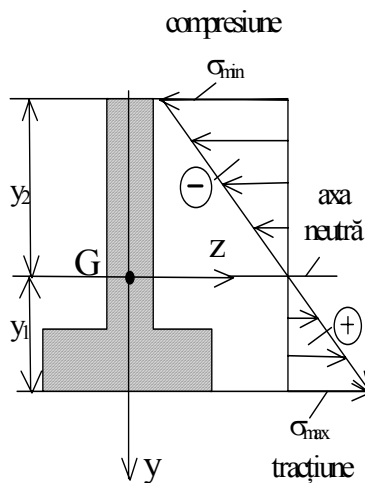


Figura 6

În calculele interesează tensiunile normale σ_x maxime și minime, care apar în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră.

Relația lui Navier se utilizează sub următoarea formă:

$$\sigma_{z,\max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (11)$$

cu modulul de rezistență dat de relația:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (12)$$

unde: $y_{\max}$ - distanța de la axa Oz la fibra cea mai îndepărtată a secțiunii.

Pentru efectuarea calcului de rezistență tensiunile maxime în modul nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă:

$$|\sigma_z|_{\max} \leq \sigma_a \quad (13)$$

Pentru grinzile de secțiune constantă, tensiunea maximă se va produce în secțiunea în care momentul este maxim ($M_{z,max}$). La grinzile cu secțiune variabilă, tensiunea maximă se poate produce și în alte secțiuni.

Observatie:

Relatii similare se folosesc si pentru situatia in care corpul este solicitat de un moment incovoietor orientat după axa Oy (axă centrala si principală de inerție a secțiunii transversale).

În cazul secțiunii circulare caracteristicile geometrice sunt date de relațiile:

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad (14)$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \quad (15)$$

Relația pentru calculul *tensiunilor tangențiale*, poarta numele de **formula lui Juravski**, si are urmatoarea forma (în orice punct al secțiunii, tensiunile tangențiale sunt paralele cu forța tăietoare):

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{T_y(x)}{b(y)} \frac{S_z(y)}{I_z} \quad (16)$$

unde: T_y - forța tăietoare din secțiunea x (se ia din diagrama de forțe tăietoare);

$S_z(y)$ - momentul static al suprafeței aflată deasupra sau sub secțiunea y, față de axa Oz (care trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale);

$b(y)$ - lățimea fibrei în secțiunea în care se calculează tensiunea tangențială;

I_z - momentul de inerție al întregii figuri, față de axa Oz.

Pentru secțiunea circulară diagrama de variație a tensiunii tangențiale este reprezentată în *figura 7*.

Tensiunile tangențiale sunt nule în fibrele extreme (pentru $y = \pm R$) și maxime

în planul neutru (pentru $y=0$). Valoarea maximă a tensiunii este $\tau_{xy \max} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{A}$

Observatie:

Relatia de calcul pentru tensiunea tangentiala este valabila si in cazul in care forta taietoare este dirijata dupa axa Oz.

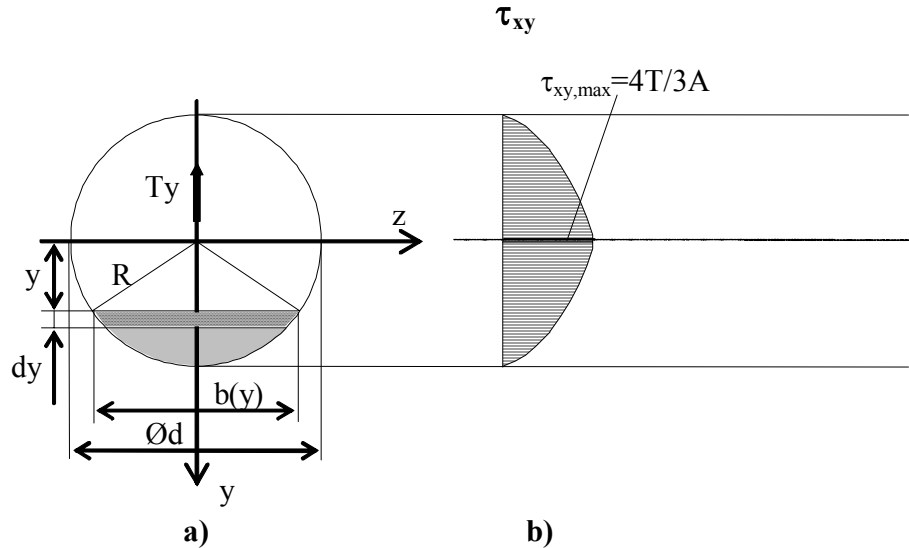


Figura 7

În expresia *tensiunilor normale* σ_x (formula lui Navier) și *tangențiale* τ_{xy} (formula lui Juravski) sunt prezente eforturile $M_z(x)$ și respectiv $T_y(x)$. Acestea se determină din diagramele de moment încovoietor și forță tăietoare. Trasarea diagramelor de eforturi implică parcurgerea următoarelor etape:

1) Figurarea și calculul reacțiunilor

În *tabelul 2* se prezintă tipurile de reazeme, reprezentările schematizate și reacțiunile care apar în fiecare tip de reazem. Pentru fiecare tip de reazem ultima reprezentare din tabel indică *reprezentarea pendulară*. Se utilizează în special primele reprezentări schematizate.

Rezemarea simplă suprimă un grad de libertate (translația pe direcția verticală) și permite translația pe direcția orizontală și rotirea. Practic această rezemare se poate realiza prin lagăre, prin intermediul unor role.

Articulația cilindrică sau articulația simplă suprimă două grade de libertate (translația pe direcția verticală și pe direcția orizontală) și permite rotirea. Practic această rezemare se poate realiza prin lagăre de alunecare sau rostogolire.

Încastrarea suprimă translația pe două direcții și rotirea deci preia toate gradele de libertate. Barele încastate la un capăt și libere la celălalt se numesc bare în *consolă*. O grindă fixată în zid, o bară sudată de un corp masiv fix pot fi considerate bare încastate.

Tabelul 2

Denumirea reazemului	Nr de grade de libertate suprimate	Reprezentări schematizate
Rezemare simplă	1	
Articulația cilindrică (simplă)	2	
Încastrarea	3	

Calculul analitic al reacțiunilor se efectuează cu respectarea următoarelor etape:

- schematizarea formei corpului;

- schematizarea modului de rezemare (stabilirea tipului de reazem și figurarea reacțiunilor corespunzătoare);
- schematizarea modului de încărcare (stabilirea forțelor și a cuplurilor);
- scrierea ecuațiilor de echilibru cu alegerea arbitrară a convențiilor de semne;
- rezolvarea sistemului de ecuații, determinarea și verificarea reacțiunilor.

Observatie:

În cazul grinzilor în consolă (încastate la un capăt și libere la celălalt), această etapă poate fi evitată dacă se izolează numai porțiuni de grindă dinspre capătul liber.

2) Impărțirea grinzii în regiuni și figurarea secțiunilor (câte o secțiune prin fiecare regiune)

3) Scrierea expresiilor analitice ale eforturilor în secțiunile fixate și studierea variației acestora

În fiecare secțiune se scrie expresia momentului încovoietor și a forței tăietoare ținând cont de următoarele definiții ale acestora:

Momentul încovoietor $M_z(x)$ (respectiv $M_y(x)$) egal cu suma algebrică a proiecției pe direcția Oz (respectiv Oy) a tuturor momentelor de la stânga sau de la dreapta secțiunii.

Forța tăietoare $T_y(x)$ (respectiv $T_z(x)$) egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe direcția Oy (respectiv Oz) a tuturor forțelor de la stânga sau de la dreapta secțiunii.

La scrierea eforturilor trebuie să fie respectate următoarele convenții de semn: *figura 8* (pentru momentul încovoietor), *figura 9* (pentru forța tăietoare).

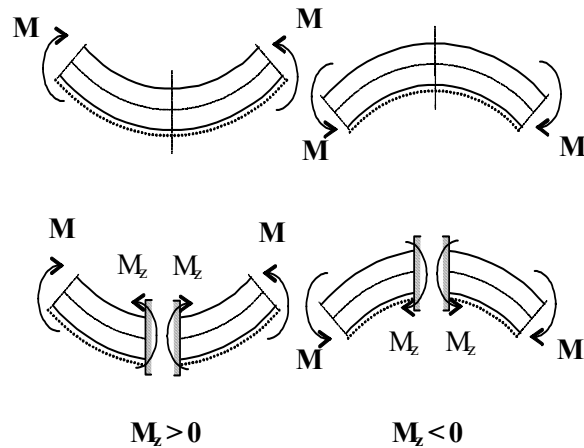


Figura 8.

Momentele sunt considerate pozitive dacă bara este curbată astfel încât fibra inferioară se află la exteriorul curburii (este sollicitată la tracțiune).

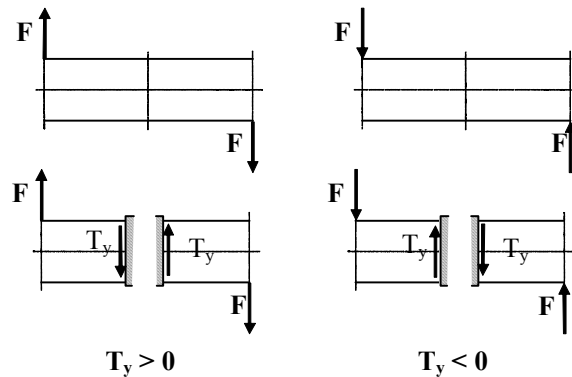


Figura 9

4) Trasarea diagramelor de eforturi si verificarea acestora

Pentru solicitările la care apar tensiuni pe aceeași direcție (tensiuni de aceeași natură) tensiunea rezultantă se calculează ca suma algebrică a tensiunilor componente (cu condiția ca tensiunea rezultantă și cele componente să nu depășească limita de proporționalitate), iar pentru solicitări la care apar tensiuni

pe direcții diferite (tensiuni de natură diferită) tensiunea echivalentă se calculează, în acest caz, pe baza uneia dintre teoriile de rezistență.

2. CONSIDERATII GENERALE

Problema generală a teoriei elasticității o reprezintă determinarea stării de tensiuni, deformații și deplasări dintr-un corp elastic, atunci când se cunosc: forma și dimensiunile acestuia, modul de încărcare și rezemare, precum și caracteristicile elastice ale materialului.

Ecuatiile fundamentale ale ***Teoriei elasticității*** sunt scrise pentru un element de volum infinitesimal și sunt grupate astfel:

- *ecuații de echilibru (Cauchy);*
- *ecuații geometrice (relații între deformații și deplasări);*
- *ecuații constitutive (legea lui Hooke).*

În ecuațiile din primele două grupe nu intervin caracteristici de material și, în consecință, ele sunt universal valabile. În ecuațiile constitutive intervin aceste caracteristici și prin urmare acestea depind de natura materialului.

Pentru a putea prevedea comportarea unui material în condiții date, trebuie să avem o modelare matematică a acesteia. Comportarea diferitelor materiale (metalice, polimeri, ceramice, compozite, etc.) în aceleași condiții de solicitare poate fi extrem de variată. Nu poate exista un model unic pentru o varietate atât de mare de materiale. Chiar pentru același material avem modele diferite pentru comportarea acestuia în domeniul liniar elastic, peste limita de elasticitate, pentru comportarea vâscoelastică, etc. Cel mai simplu model este cel elaborat pentru materialele elastice având curba caracteristică liniară.

Modelul clasic, care stă la baza *Teoriei Elasticității*, este adecvat comportării oțelului solicitat în domeniul de proporționalitate, dar și altor materiale care au o comportare similară. Pentru elaborarea modelului trebuie reținuți anumiți factori care au o influență majoră și neglijăți cei care au o influență nesemnificativă și ar aduce complicații de calcul însemnate. Reținerea factorilor esențiali se face prin formularea unor ipoteze simplificatoare.

Sub acțiunea unui sistem de sarcini corpul se deformează. Se pune problema să se determine noua formă luată după deformare și tensiunile care au luat naștere în corpul respectiv. În scopul determinării componentelor tensiunilor, deformațiilor și deplasărilor, *Teoria elasticității* se bazează pe următoarele ipoteze simplificatoare în condiții de valabilitate în raport cu rezultatele experimentale:

Ipoteza mediului continuu

Această ipoteză consideră că la scară macromecanică materia poate fi considerată continuă și nu discretă cum este în realitate (formată din atomi și molecule). Mai apropiată de realitate la corpurile amorfe și mai depărtată la cele cristaline, această ipoteză permite lucrul cu funcții continue și trecerea la limită. Studiarea structurii reale, discontinuă cere folosirea unui aparat matematic mult mai complicat.

Ipoteza omogenității mediului

Se admite că materialul este omogen, având aceleași proprietăți fizico-chimice în tot volumul său.

Ipoteza mediului izotrop

Materialul este considerat izotrop, adică caracteristicile elastice și mecanice sunt aceleași în toate direcțiile.

Ipoteza elasticității perfecte

Se admite comportarea perfect elastică a materialului, adică revenirea la forma și dimensiunile inițiale după înlăturarea sarcinilor care au produs deformarea.

Ipoteza deformațiilor mici

Pentru majoritatea corpurilor solide deformațiile elastice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpurilor. Ca urmare, sub acțiunea sarcinilor corpul solid își modifică în mică măsură configurația inițială. Aceasta face ca ecuațiile de echilibru static să poată fi scrise pentru corpul deformat la fel ca pentru cel nedeformat, respectiv ca în urma deformării direcțiile forțelor și distanțele dintre ele să rămână neschimbate. Această ipoteză conduce de asemenea la simplificarea calculelor (infiniții mici de ordinul doi care pot fi neglijate, etc.).

Ipoteza proporționalității între tensiuni și deformații

Dacă solicitarea corpului este de o așa manieră încât materialul rămâne în domeniul elastic, se admite că între tensiuni și deformații există o dependență liniară, exprimată de legea lui Hooke. Ca o consecință a acestei legi la rezolvarea unor probleme în Rezistența materialelor se poate aplica principiul suprapunerii efectelor sau principiul independenței efectelor forțelor.

Principiul lui Saint-Venant

Enunțul acestui principiu este următorul: dacă un sistem de forțe este înlocuit cu un alt sistem static echivalent, aceasta produce diferențe apreciable în starea de tensiuni și deformații din vecinătatea forțelor dar rămâne fără efect (sau cu efecte neglijabile) la distanțe suficient de mari de locul de aplicație a forțelor. Principiul este ilustrat în *figura 10*. O grindă în consolă are pe capătul liber, în prima variantă (*figura 10a*), o forță distribuită. În *figura 10b* sarcina distribuită a fost înlocuită cu o forță concentrată static echivalentă ($Q = F$). La locul de aplicare a sarcinii

efectul forței asupra grinzii va fi cu totul diferit în cele două variante. Această înlocuire însă nu produce modificări în starea de tensiuni și deformații în secțiunea A-A, aflată la o distanță suficient de mare pe forță. Prin aplicarea sarcinilor se realizează o stare locală de solicitare în jurul locului de aplicare, precum și o stare generală a corpului solid solicitat. Studiul solicitării barelor și plăcilor urmărește stabilirea, în special, a stării generale de solicitare.

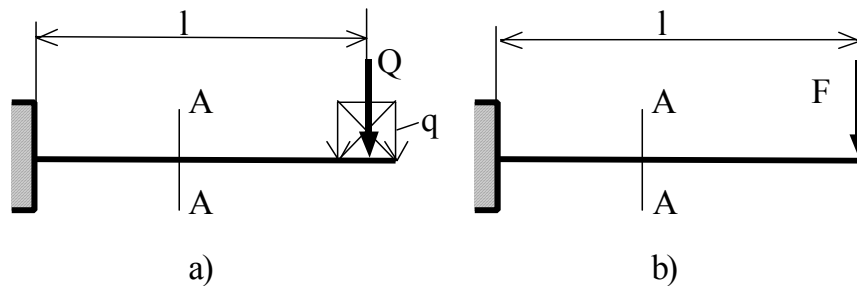


Figura 10

Ipoteza stării naturale

Se presupune că în corpurile solide nu există tensiuni în lipsa sarcinilor. Admițând această ipoteză, se poate demonstra teorema lui Khirchoff care spune că pentru un corp, o rezemare și un sistem de sarcini date, starea de tensiuni și deformații este unică. În realitate toate operațiile tehnologice, care produc încălziri și deformații plastice neuniforme produc tensiuni care rămân în corp în lipsa încărcărilor, numite tensiuni remanente. În cazul solicitărilor statice ele pot avea un efect benefic dacă sunt de sens contrar tensiunilor create de către sarcini, dar sunt nefavorabile dacă lucrează în același sens cu tensiunile de serviciu. Tensiunile remanente influențează semnificativ comportarea la solicitări variabile. Aceste tensiuni pot fi mult diminuate în urma unui tratament termic de detensionare, tratament care este dificil de aplicat structurilor de mari dimensiuni.

3. STAREA DE TENSIUNI ÎNTR-UN PUNCT AL UNUI CORP

3.1. Starea generală de tensiuni

Se consideră cazul general al unui corp solid sollicitat de un sistem oarecare de sarcini. Într-un punct oarecare din interiorul corpului se poate duce un număr nedefinit de fațete orientate diferit. La fiecare din aceste fațete elementare corespunde un anumit vector-tensiune $\vec{p}$ (figura 11). Ansamblul vectorilor tensiune care acționează pe fațetele elementare ce trec prin punctul considerat caracterizează starea de tensiune din acest punct și poartă denumirea de *fascicolul tensiunilor*. Ansamblul fasciculelor tensiunilor într-un volum poartă denumirea de *câmp de tensiune*. Câmpul de tensiune poate fi *uniaxial*, *biaxial*, *triaxial*.

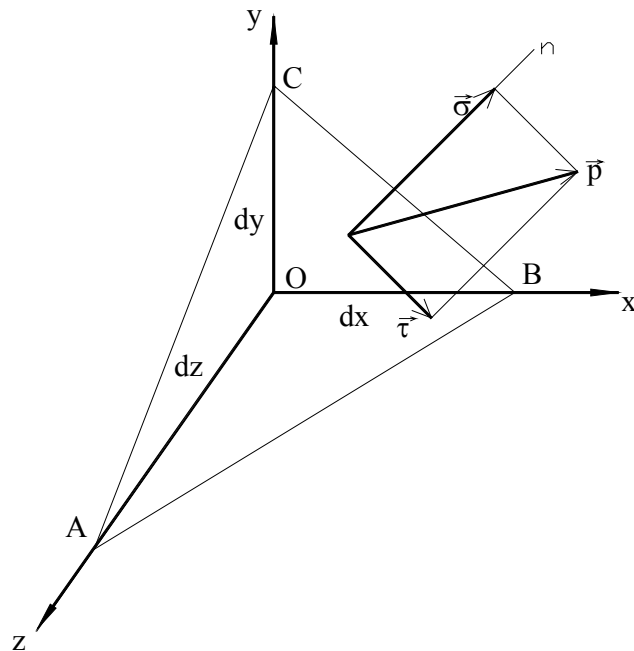


Figura 11

S-a definit în cursul de *Rezistența materialelor* **tensiunea medie** pe un element de arie ΔA (figura 12a) prin relația:

$$\vec{p}_{med\Delta A} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A}$$

Considerând materia continuă se poate restrânge oricât de mult elementul de suprafață în jurul punctului M , trecerea la limită fiind permisă în aceste condiții. Se obține astfel valoarea **tensiunii** în punctul M :

$$\vec{p}_M = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{dA}$$

Tensiunea fiind o mărime tensorială depinde atât de $d\vec{R}$ cât și de orientarea elementului de suprafață dA .

Tensiunea poate fi descompusă (figura 12b) în două componente:

- pe direcția normalei în componenta σ_{xx} , numită **tensiune normală** (orientată de direcția axei Ox);
- pe planul secțiunii în componenta τ , numită **tensiune tangențială**.

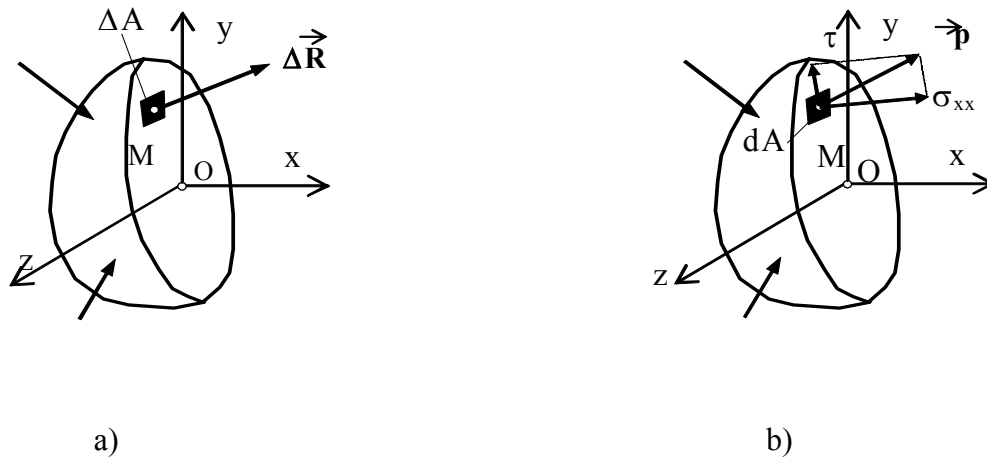


Figura 12

La rândul său, componenta τ poate fi descompusă în planul yOz , (la care Ox este normală) obținându-se componentele τ_{xy} și τ_{xz} (figura 13) care sunt paralele cu axele Oy și respectiv Oz .

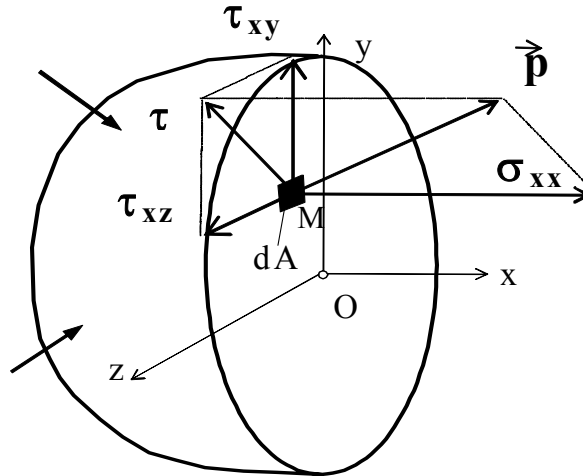


Figura 13

De reținut:

- *Starea de tensiuni dintr-un punct oarecare al corpului este perfect determinată dacă se cunosc tensiunile pe trei plane de coordonate care trec prin acel punct. Dacă poziția planelor de coordonate este arbitrară, pe fiecare dintre aceste plane există, în cazul general, atât tensiuni normale cât și tensiuni tangențiale.*

Din interiorul unui corp solid elastic aflat în echilibru, într-o stare generală de tensiuni, se izolează un paralelipiped elementar infinitezimal de dimensiuni dx , dy , dz (figura 14). Paralelipipedul se raportează la un sistem de axe triortogonal. Pentru stabilirea direcției și sensului tensiunilor se adoptă convențiile: sunt considerate pozitive fațetele elementului izolat pentru care versorul normalei (care pleacă din fațetă) este îndreptat în sensul pozitiv al unei axe și negative fațetele care au versorul orientat în sensul negativ al unei axe.

Pe fațetele paralelipipedului elementar se prezintă *componentele tensiunilor*. O tensiune este *pozitivă* dacă:

- acționează pe o fațetă pozitivă și este orientată în sensul pozitiv al unei axe;
- acționează pe o fațetă negativă și este orientată în sensul negativ al unei axe.

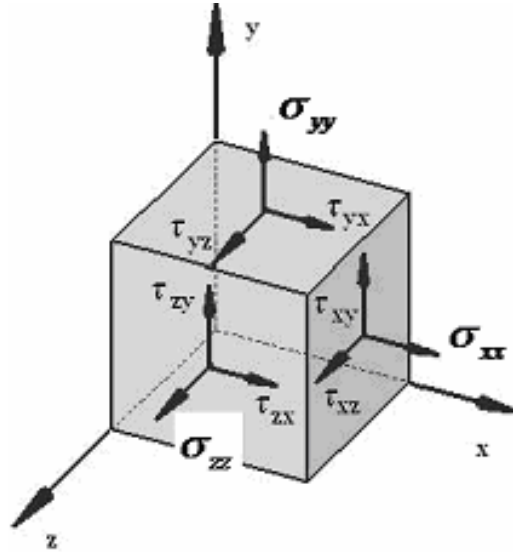


Figura 14.

În figura 14 se prezintă starea spațială de tensiuni. Toate tensiunile prezentate sunt pozitive, conform convenției de semn prezentată anterior.

Tensiunile care acționează pe o fațetă pozitivă sunt considerate negative dacă sunt orientate în sensul negativ al unei axe, iar tensiunile care acționează pe o fațetă negativă sunt considerate negative dacă acționează în sensul pozitiv al unei axe.

Cunoașterea celor 9 componente ale tensiunilor în orice punct al unui corp înseamnă cunoașterea stării de tensiuni din acel corp. Aceasta este **starea generală de tensiuni**. Rareori toate aceste tensiuni apar simultan.

Tensiunea este o *mărimă tensorială*. Componentele tensorului tensiunilor pentru starea generală de tensiuni pot fi prezentate în formă matriceală astfel:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Semnificația indicilor este următoarea: *primul indice indică normala la fațeta pe care acționează tensiunea, iar al doilea axa cu care aceasta este paralelă*.

Fascicolul tensiunilor într-un punct poate fi reprezentat printr-un tensor de ordinul trei, pe care îl vom denumi *tensor-tensiune*. Datorită proprietății de dualitate a tensiunilor tangențiale ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$) componentele tensorului tensiunilor dispuse simetric față de diagonala principală a tensorului sunt egale între ele ceea ce ne permite să denumim *tensorul tensiunilor, tensor simetric de ordinul al doilea*.

Tensorul tensiunilor se poate descompune în două componente (această descompunere convențională este utilă în calcule):

$$T_{\sigma} = T_{S\sigma} + T_{D\sigma} \quad (18)$$

$T_{S\sigma}$ reprezintă tensorul sferic și caracterizează deformația volumică în jurul unui punct fiind dat de relația:

$$T_{S\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

unde $\sigma_m = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$ reprezintă valoarea medie a tensiunilor normale pe planele de coordonate care mai este denumită și tensiune normală *octaedrică*.

$T_{D\sigma}$ reprezintă deviatorul tensorului tensiunilor, care caracterizează modificarea formei în jurul unui punct și se calculează cu relația:

$$T_{D\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (20)$$

Starea de tensiuni dintr-un punct al corpului este determinată dacă se cunosc tensiunile pe trei plane de coordonate care trec prin acel punct. În fiecare punct al unui corp există trei plane pentru care *tensiunile tangențiale* τ sunt nule, numite **plane principale**. Tensiunile de pe aceste plane se numesc **tensiuni** (normale) **principale** ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Intersecția planelor principale formează axele numite **direcțiile principale ale tensiunilor** (figura 15).

Se vor folosi următoarele notații pentru tensiunile principale:

$$\sigma_p \geq \sigma_q \geq \sigma_l$$

sau

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

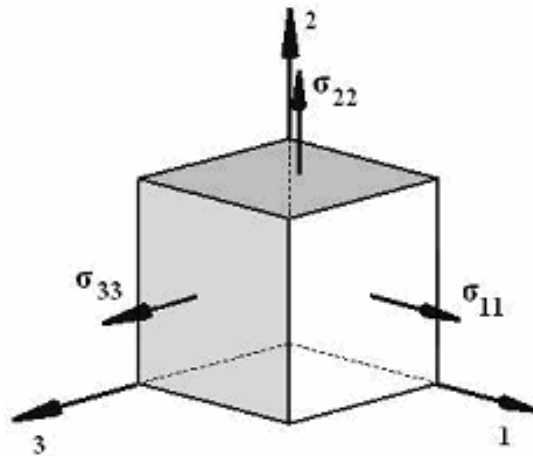


Figura 15.

tensiunile fiind ordonate algebric ($\sigma_p \equiv \sigma_1 \equiv \sigma_{11}$ etc.).

3.2. Starea plană și uniaxială de tensiuni

Din starea generală de tensiuni pot fi determinate următoarele cazuri particulare:

1. Starea plană de tensiuni (figura 16)

Pentru această stare: $\sigma_{zz} = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$. Pe fațetele opuse acționează tensiuni egale și de sensuri contrare.

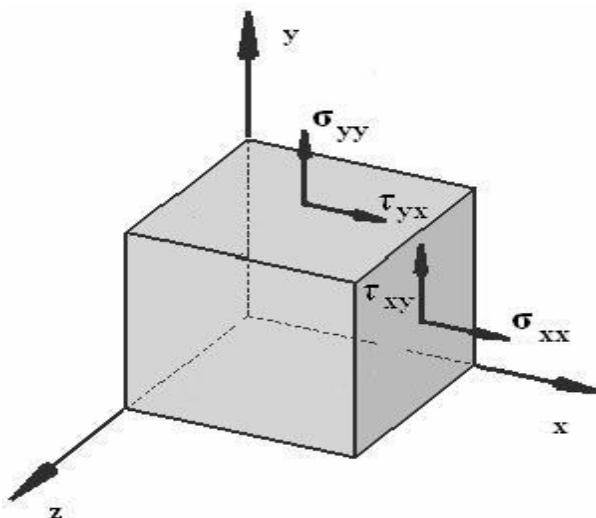


Figura 16.

În figura 17 este prezentată vederea după axa Oz a stării plane de tensiuni.

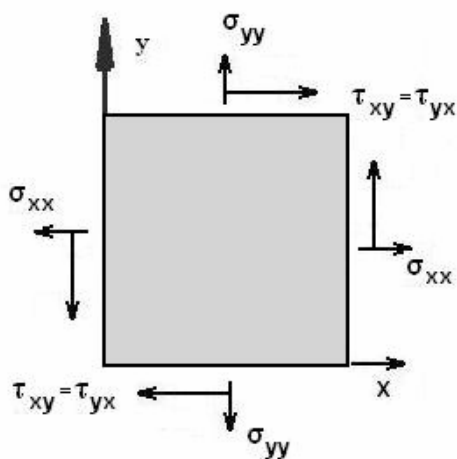


Figura 17.

În figura 18 este reprezentată starea de tensiuni principale în plan.

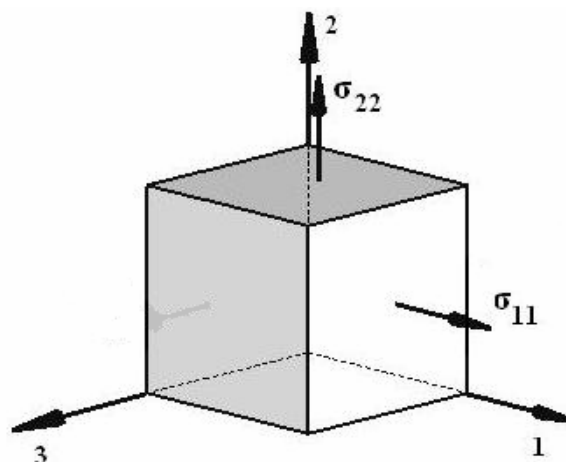


Figura 18.

2. *Starea uniaxială* de tensiuni (tracțiune pe direcția axei Ox (figura 19)).

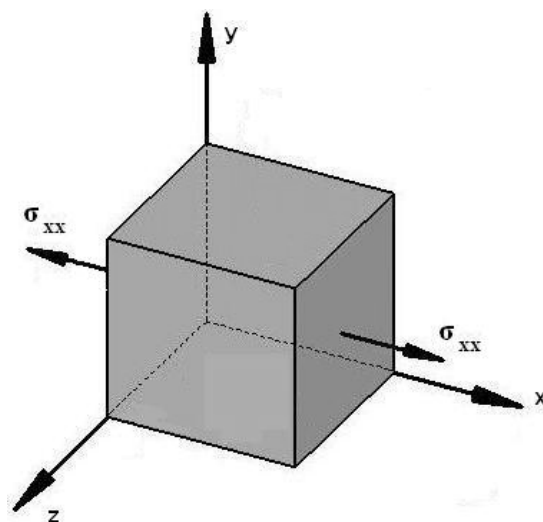


Figura 19.

În figura 20 se prezintă semnul tensiunilor și alungirilor specifice pentru o stare uniaxială de tensiuni (pozitive la *tracțiune*, negative la *compresiune*).

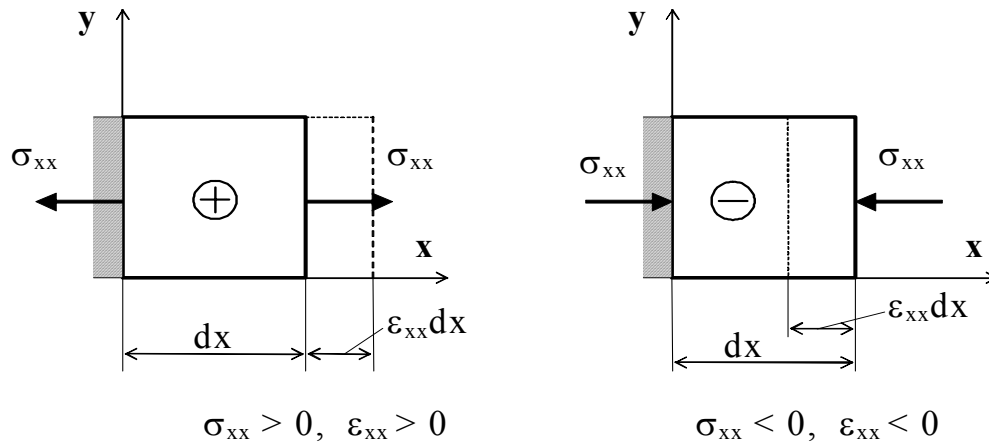


Figura 20.

4. Variația tensiunilor în jurul unui punct.

Tensiuni principale

4.1. Starea spațială de tensiuni

Tensiunile principale reprezintă cea mai simplă stare de tensiune dintr-un punct al unui corp. În fiecare punct al unui corp există trei plane pentru care tensiunile tangențiale τ sunt nule, numite **plane principale**, iar tensiunile de pe aceste plane se numesc **tensiuni principale** ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Intersecția planelor principale formează axele numite **direcțiile principale ale tensiunilor**.

Poziția planelor principale față de un sistem de coordonate $xOyz$ ales arbitrar, adică *cosinusurile directoare* ale normalelor la planele principale, se notează cu l, m, n și satisfac condiția:

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= l; \quad \cos(n, y) = m; \quad \cos(n, z) = n \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

În starea spațială de tensiuni direcțiile tensiunilor principale σ_1 respectiv σ_3 , dintr-un punct, (notate cu **1** și **3**) sunt reciproc perpendiculare. Direcția **2** este perpendiculară pe planul **103** astfel încât, împreună cu celelalte două, formează un sistem triortogonal drept. Se fac următoarele notații referitoare la aceste tensiuni:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma_p; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = \sigma_l \quad (22)$$

Tensiunile principale sunt ordonate algebric, prin urmare între tensiuni există relația:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (23)$$

Observații:

- În starea spațială de tensiuni toate cele trei tensiuni principale sunt diferite de zero.
- Tensiunile normale principale sunt independente la schimbarea sistemului de coordonate.
- În planele principale tensiunile tangențiale sunt nule.
- Cele trei plane principale dintr-un punct al corpului deformat sunt reciproc perpendiculare.
- Intersecția planelor principale determină axele sau direcțiile principale.
- Într-un corp elastic, omogen și izotrop direcțiile principale sunt reciproc perpendiculare.
- Direcțiile principale se bucură de proprietatea că ele coincid cu normalele fețelor pe care tensiunea tangențială este nulă.

Prin raportare la acest sistem de referință, se obțin expresiile cele mai simple pentru tensiuni care reprezintă rădăcinile reale și distincte ale ecuației:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (24)$$

Relația (24) se numește **ecuație seculară**, iar coeficienții I_1 , I_2 , I_3 se numesc *invarianți* deoarece nu se modifică la rotirea sistemului de axe. I_1 , I_2 și I_3 se determină cu relațiile:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (25)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (26)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (27)$$

În relațiile (26), (27) determinanții sunt simetrici față de diagonala principală.

Rădăcinile ecuației seculare (25) sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2S \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \frac{I}{3} I_1 \\ \sigma_2 &= 2S \left[\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 120^\circ \right] + \frac{I}{3} I_1 \\ \sigma_3 &= 2S \left[\left(\frac{\alpha}{3}\right) + 240^\circ \right] + \frac{I}{3} I_1 \end{aligned} \quad (28)$$

unde:

$$S = \left(\frac{I}{3} R \right)^{1/2};$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{Q}{2T} \right);$$

$$R = \frac{I}{3} I_1^2 - I_2;$$

$$Q = \frac{I}{3} I_1 I_2 - I_3 - \frac{2}{27} I_1^3;$$

$$T = \left(\frac{I}{27} R^3 \right)^{1/2}$$

Observații:

- Tensiunea principală cea mai mare σ_1 este totodată și cea mai mare posibilă dintre tensiunile ce acționează asupra elementului studiat, iar

tensiunea principală minimă σ_3 este cea mai mică din ansamblul tensiunilor.

- O condiție necesară în cazul stării spațiale de tensiune (triaxială) este ca invariantul I_3 al ecuației seculare să fie diferit de zero.

Un model geometric al acestei stări de tensiune este **elipsoidul lui Lamé** sau **elipsoidul tensiunilor (figura 21)**: starea de tensiune dintr-un punct al unui corp poate fi reprezentată printr-un elipsoid care are ca semiaxe tensiunile normale principale și a cărei ecuație este:

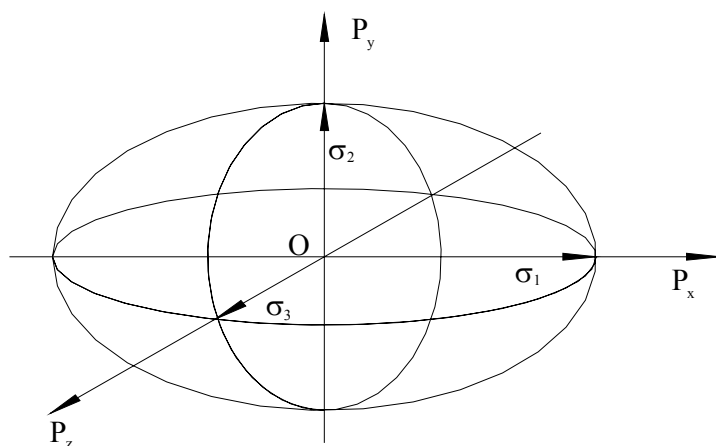


Figura 21

$$\left(\frac{p_x^2}{\sigma_1^2}\right) + \left(\frac{p_y^2}{\sigma_2^2}\right) + \left(\frac{p_z^2}{\sigma_3^2}\right) = 1$$

Suprafața elipsoidului reprezintă locul geometric al extremităților vectorilor tensiunii totale pentru snopul de plane care trece prin punctul considerat. Dacă toate cele trei tensiuni principale sunt egale între ele elipsoidul se transformă într-o sferă (o stare de tensiune echiaxială ca de exemplu în cazul compresiunii hidrostatice sau a tracțiunii uniforme după cele trei direcții).

Mărimile p_x , p_y , p_z se pot considera coordonatele extremității vectorului tensiunii totale ce acționează asupra elementului de suprafață de orientare oarecare și sunt calculate cu relațiile de mai jos:

$$p_x = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n$$

$$p_y = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n$$

$$p_z = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n$$

Dintre stările triaxiale de tensiune se menționează:

- *starea de tensiune la care nici una dintre cele trei tensiuni nu este negativă.*

O astfel de stare de tensiuni este denumită *întindere triaxială*. Un caz particular al întinderii triaxiale este *întinderea triaxială uniformă* (de exemplu starea de tensiune a unui volum elementar din centrul unei bile încălzite repede și egal din toate părțile. În acest caz tensiunile apar din cauza diferenței de temperatură dintre straturile exterioare și cele interioare de material. Deoarece nu apar tensiuni tangențiale o asemenea stare de tensiune se numește *întindere pură*).

- *starea de tensiune la care toate cele trei tensiuni normale principale sunt negative.*

Este o stare de *compresiune triaxială*. Un caz particular al compresiunii triaxiale este cel al *compresiunii triaxiale uniforme*, produsă de presiunea hidrostatică exercitată asupra unui corp. Și în acest caz tensiunile tangențiale sunt nule, iar starea de tensiuni poartă numele de *compresiune triaxială pură*. Un alt caz particular este cel dat de contactul dintre două sfere sau dintre o sferă și un plan, când două tensiuni normale principale sunt egale.

- *starea de tensiune la care tensiunile normale principale sunt atât pozitive cât și negative.*

Este starea *triaxială mixtă* (de exemplu solicitarea care apare într-un tub cu peretele gros supus la o presiune interioară).

4.2.Starea plană de tensiuni (biaxială)

În această stare de tensiuni două dintre tensiunile principale sunt diferite de zero, iar a treia σ_3 este nulă. În acest caz suprafața elipsoidului tensiunilor se transformă în suprafața unei elipse numită *elipsa tensiunilor*. O condiție necesară pentru starea plană de tensiuni este ca cel de al doilea invariant I_2 să fie diferit de zero, iar cel de al treilea invariant I_3 să fie egal cu zero. Prin urmare *ecuația seculară* (24) devine:

$$\sigma[\sigma^2 - I_1\sigma + I_2] = 0 \quad (29)$$

cu una dintre rădăcinile egală cu zero.

Dintr-un corp, aflat într-o stare plană de tensiuni, se decupează o prismă triunghiulară infinitezimală (se secționează corpul cu un plan înclinat) așa cum este indicat în *figura 22*.

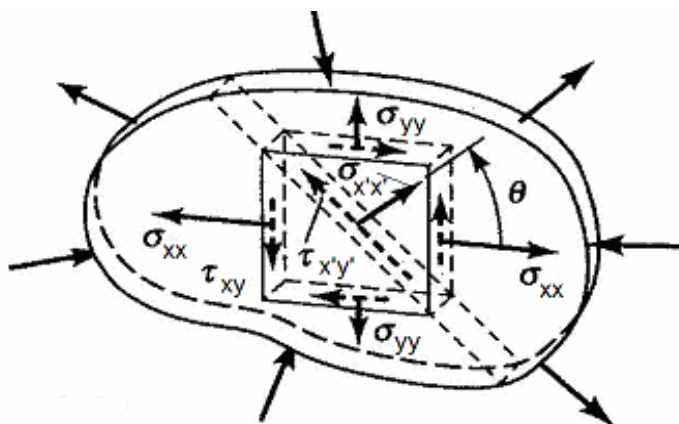


Figura 22.

Se pune problema determinării expresiilor pentru tensiunile σ și τ precum și a tensiunilor principale în funcție de unghiul θ atunci când se cunosc componentele σ_{xx} , σ_{yy} și τ_{xy} ale tensorului tensiunilor pe fețele AO și OB perpendiculare pe planul desenului, având ca normale pe Ox și Oy (*figura 23*). Se scrie echilibrul tensiunilor care acționează asupra acestui element și se obține:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau(\theta) &= \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (30)$$

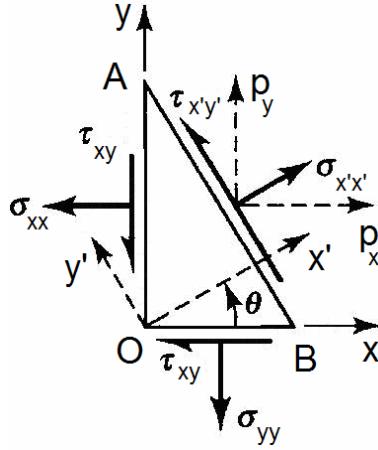


Figura 23.

Relațiile (30) indică faptul că dacă sunt cunoscute tensiunile de pe două plane ortogonale care trec printr-un punct, se pot calcula tensiunile în raport cu orice plan care trece prin acel punct.

Se exprimă relațiile în funcție de argumentul dublu cunoscând:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}; \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}; \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{2};$$

și rezultă:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (31)$$

$$\tau(\theta) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (32)$$

Relațiile (31), (32) dau variațiile tensiunilor σ și τ în funcție de unghiul θ ce poate varia în intervalul $[0, \pi]$. Fiind două funcții finite, continue, derivabile care variază pe un domeniu închis ele își ating marginile (au un maxim și un minim). Se dorește determinarea valorilor extreme. Pentru aceasta se derivează *relația (31)* în raport cu 2θ și se anulează derivata. Se obține:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d(2\theta)} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (33)$$

Din *relațiile (32), (33)* se observă că:

$$\tau(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d(2\theta)} \quad (34)$$

Prin urmare tensiunea normală (funcția $\sigma(\theta)$) prezintă un punct de extrem (avem tensiuni principale) atunci când $\tau(\theta) = 0$.

Pentru starea plană de tensiuni, **tensiunile principale** sunt:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (35)$$

unde semnul (+) este pentru σ_1 , deci $\sigma_{max} = \sigma_1$ și $\sigma_{min} = \sigma_2$. Din relația (35) se observă că $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{constant}$ deci într-un punct dat suma tensiunilor normale în raport cu direcțiile principale este constantă.

Egalând cu zero expresia lui τ din relația (32) se obține:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \operatorname{tg} 2\theta$$

deci **direcțiile principale** sunt date de soluțiile ecuației:

$$\operatorname{tg} 2\theta_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (36)$$

Observații:

- In secțiunile in care tensiunile normale devin maxime sau minime tensiunile tangențiale se anulează. Reciproca nu este adevărată.
- Tensiunile normale maxime sau minime se numesc tensiuni normale principale, iar direcțiile normalelor la planele respective se numesc direcții principale.
- Unghiurile direcțiilor principale sunt date de relația (36).
- Direcțiile principale sunt reciproc perpendiculare (deoarece perioada funcției este π).
- Dacă tensiunile tangențiale sunt pozitive, direcția tensiunii normale maxime se află în primul cadran și se măsoară în sens trigonometric.

Pentru tensiuni tangențiale negative, această direcție se află la un unghi negativ și ascuțit față de axa **Ox**

- Planele normale la direcțiile principale se numesc **plane principale**.
- Pentru materialelor izotrope, direcțiile tensiunilor principale coincid cu cele ale deformațiilor principale.

Direcțiile tensiunilor tangențiale extreme se determină din condiția $\frac{d\tau(\theta)}{d(2\theta)} = 0$. Se constată că tensiunile tangențiale extreme apar în plane înclinate la 45° față de direcțiile principale. Tensiunile tangențiale maxime și minime sunt date de relațiile:

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (37)$$

sau

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (38)$$

cu $\tau_{max} = \tau_1$ și $\tau_{min} = \tau_2$.

Relația (37) arată că cele două tensiuni tangențiale sunt egale dar de sensuri contrare, ceea ce indică faptul că se respectă dualitatea tensiunilor tangențiale. În secțiunile în care tensiunile tangențiale au valori extreme, tensiunile normale sunt diferite de zero.

Un model geometric al stării plane de tensiune este **elipsa lui Lamé** (figura 24): o elipsă cu semiaxa mare egală cu σ_1 și semiaxa mică egală cu σ_2 și a cărei ecuație este:

$$\left(\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} \right) + \left(\frac{p_y^2}{\sigma_2^2} \right) = 1 \quad (39)$$

Într-un punct oarecare **B** tensiunea **p**, aflată sub unghiul θ , se decompune în componentele p_x și p_y .

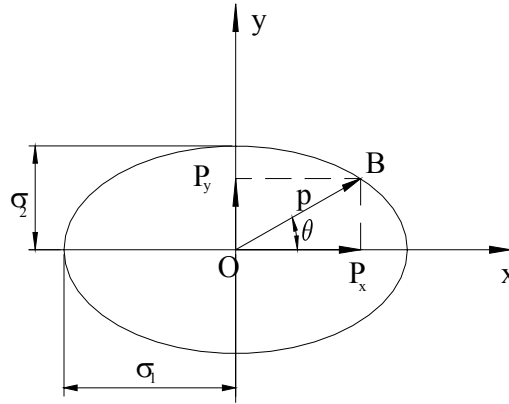


Figura 24.

Funcțiile $\sigma(\theta)$ și $\tau(\theta)$ din relațiile (16), (17) pot fi prezentate grafic în coordonate carteziene, în coordonate polare (cea mai sugestivă) și prin în cercul lui Mohr. Cea mai comodă este reprezentarea grafică prin cercul lui Mohr, în sistemul de coordonate σ, τ .

În sistemul axelor principale relațiile (16), (17) pot fi scrise sub forma:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \quad (40)$$

$$\tau(\theta) = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta \quad (41)$$

Se ridică la pătrat și se adună ultimele două relații rezultând:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (42)$$

Relația (26) reprezintă matematic ecuația **cercului lui Mohr** pentru starea plană de tensiune. Este un cerc cu centrul pe axa σ , la distanța $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ de origine și de rază $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ (figura 25).

Orice stare plană de tensiuni se reprezintă printr-o pereche de puncte diametral opuse de pe cerc, în funcție de unghiul θ dintre planul respectiv și axa Ox .

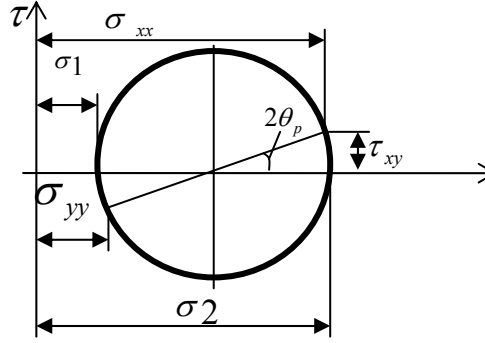


Figura 25.

3.3. Starea liniară de tensiuni (monoaxială)

Condiția necesară pentru a exista o stare de tensiune monoaxială este ca al doilea și al treilea invariant al tensiunilor să fie egali cu zero. În acest caz ecuația seculară devine:

$$\sigma^2 [\sigma - I_1] = 0 \quad (43)$$

cu două rădăcini egale cu zero. Pentru starea de tensiune monoaxială elipsoidul tensiunilor se transformă într-un segment de dreaptă.

Starea monoaxială de tensiune este produsă de solicitările axiale. În acest caz numai tensiunea normală σ_{xx} este diferită de zero. Pentru studiul variației tensiunilor în jurul unui punct se păstrează modul de secționare de la starea plană de tensiuni (vezi figura 22). Se figurează tensiunile care apar și se scrie echilibrul elementului izolat:

$$\sigma(\theta) = \sigma_{xx} \cos^2 \theta \quad (44)$$

$$\tau(\theta) = -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta \quad (45)$$

sau exprimând relațiile în funcție de argumentul dublu rezultă:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (46)$$

$$\tau(\theta) = -\frac{\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta \quad (47)$$

Se pune problema stabilirii valorilor unghiului θ pentru care cele două tensiuni sunt maxime sau minime. Astfel tensiunea normală este maximă pentru $\cos 2\theta = 1$ deci pentru $2\theta = 0$, respectiv $\theta = 0$ (pentru normala pe direcția forțelor). Valoarea minimă se obține pentru $\cos 2\theta = -1$ sau $2\theta = \pi$ respectiv $\theta = \pi/2$ deci pentru secțiunea paralelă cu direcția forțelor. Tensiunile principale sunt:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \sigma_1 = \sigma_{xx} \\ \sigma_{min} &= \sigma_2 = 0\end{aligned}\tag{48}$$

Tensiunea tangențială are valoarea maximă pentru $\sin 2\theta = 1$ sau $2\theta = \pi/2$ respectiv $\theta = \pi/4$. Valoarea tensiunii este:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{xx}}{2}\tag{49}$$

Observații:

- *La solicitările axiale în secțiunile înclinate apar atât tensiuni normale cât și tensiuni tangențiale.*
- *Tensiunile tangențiale maxime se obțin în secțiuni înclinate la 45° față de axa barei și sunt egale cu jumătatea efortului normal principal.*

Dacă în relația (42) se face σ_2 zero rezultă:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2\tag{50}$$

Relația (50) reprezintă **cercul lui Mohr** pentru solicitarea monoaxială: un cerc cu centru pe axa σ , care trece prin origine și are raza $\sigma_1/2$ (figura 26).

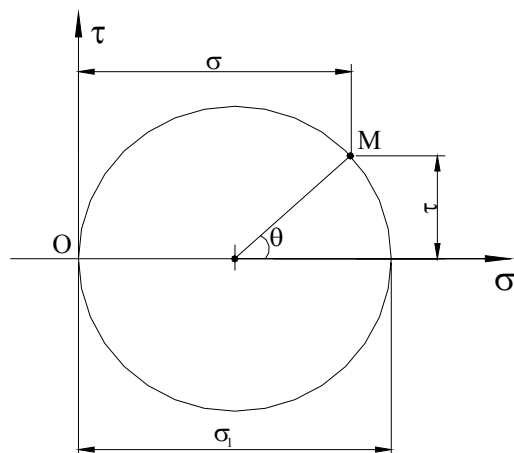


Figura 26.

Valorile tensiunilor σ și τ pentru orice secțiune diferită de unghiul θ sunt date de coordonatele punctelor de pe periferia cercului (de exemplu punctul M).

5. Starea de deformății într-un punct al unui corp

5.1. Starea generală de deformății

Prin **deformație** se înțelege modificarea distanței dintre puncte sau secțiuni, sau a unghiurilor dintre două segmente duse printr-un punct. Prin stare de deformație tridimensională sau spațială se înțelege deformarea unui corp solid oarecare. Se spune că un corp este deformat când pozițiile relative ale punctelor acestui corp au variat. Variația relativă a punctelor unui corp deformat se traduce prin deplasări, variații de lungime și unghi. Modificările lungimilor segmentelor se numesc **deformații liniare**, iar modificările unghiurilor **deformații unghiulare** sau **lunecări**. Se consideră că deformațiile corpului sunt deformații elastice mici adică deformațiile corpului dispar după înlăturarea sistemului de sarcini (corpul revine la forma și dimensiunile inițiale) și sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpului.

Se considera un corp solid și punctele C , D din interiorul corpului care determină segmentul $[CD]$. Punctele M , O , N determină segmentele $[OM]$ și $[ON]$ astfel încât între acestea să existe un unghi drept (figura 27). După deformarea corpului punctele se deplasează în C' , D' , M' , N' și O' . Se definește ca fiind **deformație liniară absolută** variația lungimii segmentului $[CD]$:

$$\delta = \Delta l = [C'D'] - [CD] = l - l_0$$

Se definește **deformația liniară specifică** sau **alungirea specifică** (alungirea unității de lungime) ca fiind limita raportului dintre deformația liniară absolută și lungimea inițială a segmentului $[CD]$:

$$\varepsilon = \lim_{[CD] \rightarrow 0} \frac{[C'D'] - [CD]}{[CD]}$$

sau

$$\varepsilon = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{\delta}{l_0} = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{l - l_0}{l_0}$$

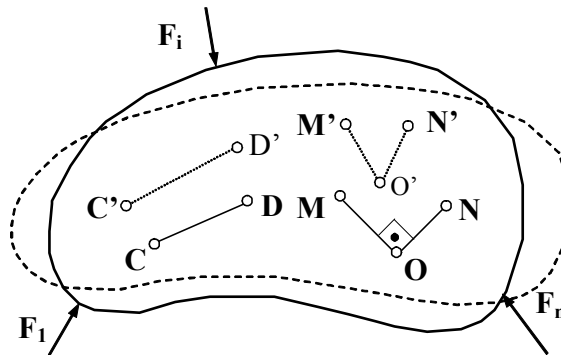


Figura 27

Se definește **deformația unghiulară** sau **lunecarea specifică** ca fiind mărimea cu care variază unghiul drept construit în vecinătatea punctului O .

Se considera corpul prismatic din figura 28. Dacă se consideră fața de jos imobilă, lunecarea fețelor paralel cu ele însele se poate măsura prin unghiul γ care măsoară variația unghiului drept. ΔS se numește **lunecare absolută**, iar γ **lunecare specifică**. Deoarece lunecarea specifică este foarte mică se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{h} \approx \gamma$$

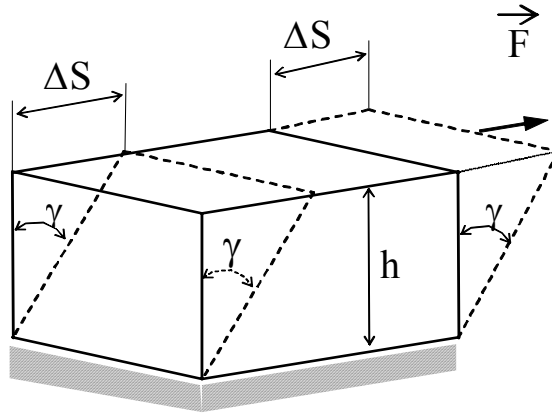


Figura 28.

În figura 29. se prezintă componentele deformațiilor specifice ale paralelipipedului elementar, izolat din corpul elastic deformabil. Deformațiile specifice sunt desemnate prin indici care au următoarea semnificație:

ε_i - alungirea specifică pe direcția axei Oi ;

γ_{ij} - lunecarea specifică în planul iOj .

Totalitatea componentelor definesc *tensorul deformațiilor specifice* într-un punct al corpului. Componentele *tensorului deformațiilor*, corespunzător tensiunilor de mai sus (pentru starea generală de tensiuni), pot fi scrise matriceal astfel:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Cunoașterea celor 9 componente ale deformațiilor în orice punct al unui corp înseamnă cunoașterea stării de deformații din acel corp.

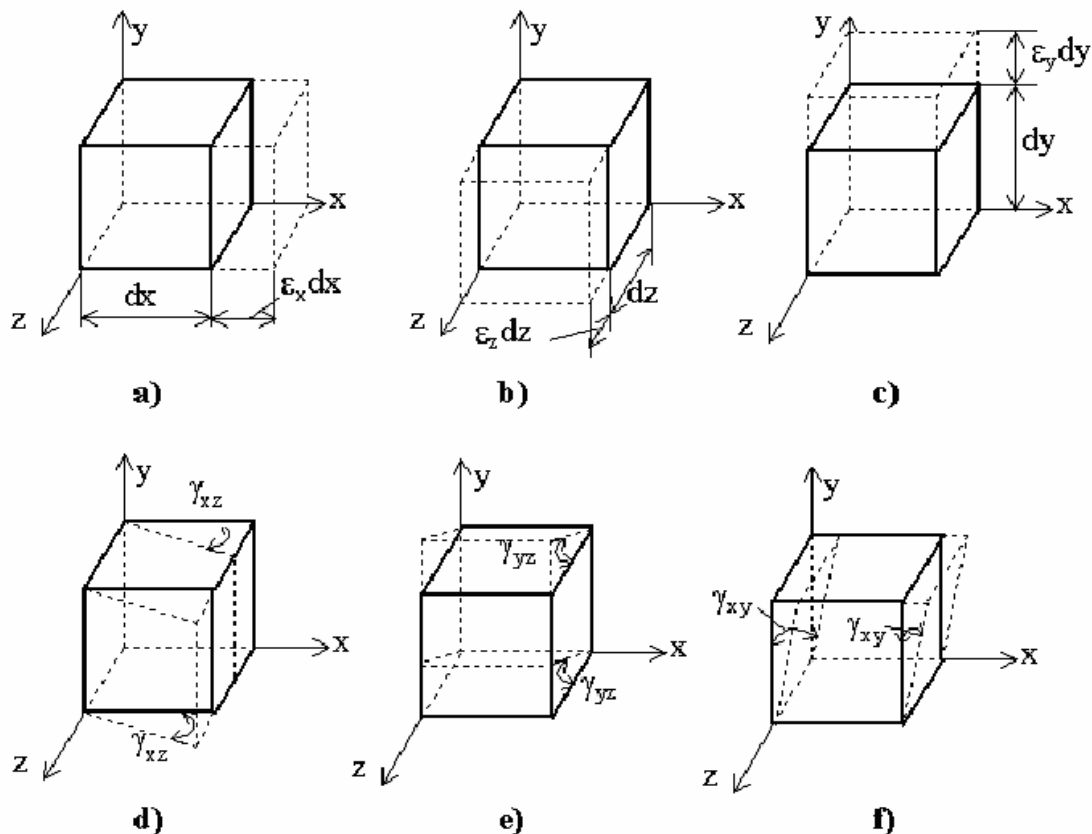


Figura 29.

Observații:

- Deformațiile specifice, la fel ca și tensiunile, sunt mărimi locale, determinate în vecinătatea unui punct.
- Pentru materiale izotrope lunecările specifice nu depind de sensul deformării (de la axa Ox spre Oy sau invers) și în consecință matricea componentelor tensorului deformațiilor (relația 51) este simetrică față de diagonală principală.
- Tensiunilor normale σ le corespund alungiri specifice ϵ , iar tensiunilor tangențiale τ lunecări γ .
- La materialele izotrope nu există influențe reciproce între alungirile specifice ϵ și lunecările γ .

- *Nu există o coincidență între starea de tensiune și starea de deformare. Astfel, la o stare de tensiune monoaxială corespunde o stare de deformare triaxială și invers. De exemplu în cazul întinderii barelor de secțiune constantă, în secțiunea transversală apare o tensiune σ_x și corespund alungiri specifice ε pe toate cele trei direcții.*

În orice punct al corpului deformat există trei axe reciproc perpendiculare, numite **axele deformațiilor principale**, pentru care componentele *deformației unghiulare* γ sunt nule. Unghiurile dintre aceste axe nu se modifică în urma deformării. Cele trei plane perpendiculare definite de aceste axe se numesc **planele principale ale deformației**. Deformațiile pe direcțiile principale ale deformațiilor au valorile ε_1 , ε_2 , ε_3 . Luând direcțiile principale ca axe tensorul deformațiilor devine:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Ca rezultat al solicitării corpurile se deformează și apar deplasări. Prin **deplasare** se înțelege modificarea poziției unui punct sau a unei secțiuni a corpului. Se iau în considerație numai *deplasări elastice* sau *elasto-plastice* produse ca urmare a deformării corpului, atunci când acesta își modifică dimensiunile și forma geometrică inițială.

Fie un punct **O** din interiorul unui corp elastic. După aplicarea sarcinilor corpul se deformează și punctul ajunge în **O'**. *Deplasarea totală* a punctului va fi vectorul $\vec{\Delta}$ cu originea în **O** și vârful în **O'**. Proiecțiile lui $\vec{\Delta}$ pe axele sistemului triortogonal se notează cu **u**, **v** și **w** și se numesc *componentele deplasării* (figura 30).

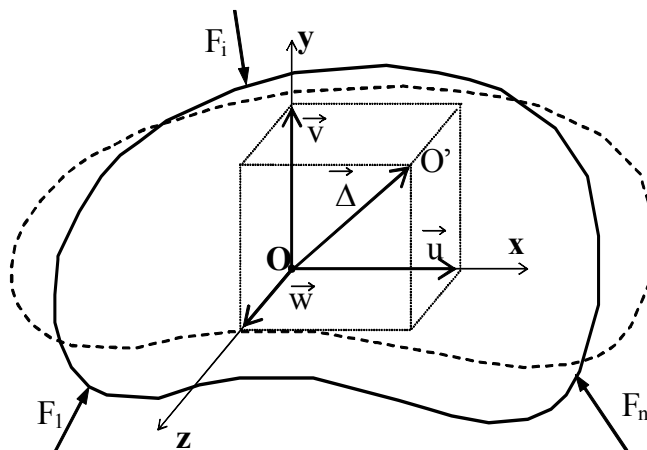


Figura 30.

Componentele deplasării depind de coordonatele punctului și între ele există relația:

$$\Delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

Observații:

- A cunoaște starea de deplasări dintr-un corp înseamnă să se cunoască componentele deplasării în orice punct al corpului.
- Vectorul deplasărilor unui punct are componentele u (pe Ox), v (pe Oy) și w (pe Oz).

Cazul general de deformare poate fi considerat ca rezultatul unei suprapunerii a două stări de deformare:

- una datorită deformațiilor liniare egale cu ϵ_0 și cu deformații unghiulare nule;
- alta datorită deformațiilor liniare $\epsilon_{xx} - \epsilon_0$, $\epsilon_{yy} - \epsilon_0$, $\epsilon_{zz} - \epsilon_0$ și cu deformațiile unghiulare γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} egale cu deformațiile unghiulare ale stării de deformații inițiale.

La prima stare de deformare se schimbă numai volumul (forma rămâne neschimbată) și ea se caracterizează prin tensorul sferic al deformațiilor:

$$T_{\varepsilon_o} = \begin{bmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_o \end{bmatrix} \quad (53)$$

cu $\varepsilon_o = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}}{3}$ numită deformăție liniară medie.

La cea de a doua stare de deformăție se schimbă numai forma (schimbarea volumului este egală cu zero) și ea este caracterizată prin deviatorul deformațiilor:

$$T_{D\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_o & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_o & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_o \end{bmatrix} \quad (54)$$

La starea de deformăție inițială se schimbă atât volumul cât și forma. Această descompunere are o anumită semnificație fizică, deoarece apariția deformațiilor plastice din material este legată de apariția deformațiilor unghiulare. În cazul tracțiunii sau compresiunii triaxiale încercările au arătat că nu apar deformații plastice în material. Apariția deformațiilor plastice se datorește numai modificării formei volumului elementar.

Suma componentelor corespunzătoare tensorului sferic și deviatorului deformațiilor ne dă componentele deformației în starea de deformăție inițială. Din această cauză descompunerea stării de deformăție inițială este echivalentă cu descompunerea tensorului deformațiilor într-un tensor sferic și un deviator al deformațiilor:

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon_o} + T_{D\varepsilon} \quad (55)$$

5.2. Variația deformațiilor în jurul unui punct

Deformațiile specifice ca și tensiunile pot varia în jurul unui punct. Variația deformațiilor în jurul unui punct se exprimă prin următoarele relații, similare relațiilor (31) și (32):

$$\begin{aligned}\varepsilon(\theta) &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \\ \gamma(\theta) &= -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (56)$$

În orice punct al corpului deformat există trei axe reciproc perpendiculare, numite **axele deformațiilor principale**, pentru care componentele *deformației unghiulare* γ sunt nule. Unghiurile dintre aceste axe nu se modifică în urma deformării. Cele trei plane perpendiculare definite de aceste axe se numesc **planele principale ale deformației**.

Observație:

- Pe cele trei direcții principale de deformații alungirile specifice au valorile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, iar lunecările specifice sunt nule.

Pentru starea spațială deformațiile principale pot fi determinate ca rădăcini ale ecuației:

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 + J_2 \varepsilon - J_3 = 0 \quad (57)$$

Invarianții J_1, J_2 și J_3 pot fi determinați din I_1, I_2 și I_3 , dați de relațiile (25), (26), (27), în care se înlocuiesc σ_{kk} cu ε_{kk} și τ_{ij} cu $\gamma_{ij}/2$.

Pentru materiale izotrope, *direcțiile deformațiilor și tensiunilor principale coincid*, iar deformațiile principale sunt date de relațiile:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (58)$$

Lunecarea maximă se determină cu relația:

$$\frac{\gamma_{max,min}}{2} = \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (59)$$

Ca și în cazul tensiunilor, variația deformațiilor în jurul unui punct poate fi prezentată în *coordonate carteziane, polare* sau prin *cercul lui Mohr* pentru deformații (cercul se trasează în coordonatele ε și $\gamma/2$).

Dacă se reprezintă cercurile tensiunilor și cel al deformațiilor suprapuse, se constată că ele sunt concentrice și raportul diametrelor este:

$$\frac{D_{\varepsilon}}{D_{\sigma}} = \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

6. Ecuațiile fundamentale ale Teoriei Elasticității

Ecuațiile fundamentale ale Teoriei elasticității pot fi grupate astfel:

1. *ecuații de echilibru (Cauchy);*
2. *ecuații geometrice (relații între deformații și deplasări);*
3. *ecuații constitutive (legea lui Hooke).*

Observații:

- *Ecuațiile fundamentale ale Teoriei elasticității sunt scrise pentru un element de volum infinitesimal.*
- *În ecuațiile din primele două grupe nu intervin caracteristici de material și, în consecință, ele sunt universal valabile.*
- *În ecuațiile constitutive intervin aceste caracteristici și deci acestea depind de natura materialului.*

6.1. Ecuații de echilibru (Cauchy)

Aceste ecuații au la bază echilibrul de forțe, nu fac apel la caracteristici fizice și prin urmare sunt valabile pentru orice material.

Dintr-un corp cu grosimea egală cu unitatea se izolează un element cu dimensiunile dx , dy (figura 31). Elementul trebuie să se afle în echilibru. Se scriu ecuațiile de echilibru luând în considerație forțele rezultate din tensiuni precum și forțele masice ale căror componente pe unitatea de volum se notează cu X și Y . Pe planele ce cuprind axele Ox și Oy apar tensiunile σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} și τ_{yx} . Dând creșteri infinitezimale tensiunilor de pe fețele opuse ale elementului de volum și scriind echilibrul forțelor se obține:

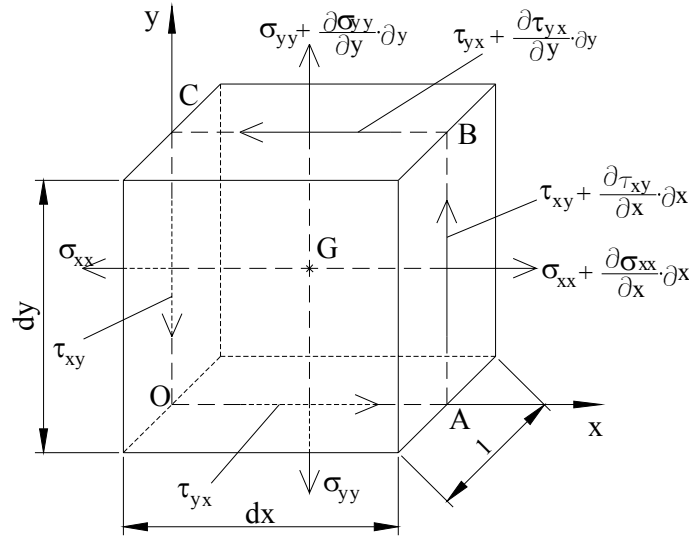


Figura 31

- proiecție pe orizontală:

$$\sigma_x \cdot dy \cdot 1 + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot 1 - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot 1 - \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 + X \cdot dx \cdot dy \cdot 1 = 0$$

- proiecție pe verticală:

$$\sigma_y \cdot dx \cdot 1 + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot 1 - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot 1 - \tau_{yx} \cdot dy \cdot 1 + Y \cdot dx \cdot dy \cdot 1 = 0$$

Se împart relațiile prin $dx \cdot dy$ se desfac parantezele și se reduc termenii asemenea.

Se obține:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\tag{60}$$

Prin generalizarea *relațiilor* (60) se obțin ecuațiile diferențiale de echilibru pentru starea generală de tensiuni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\tag{61}$$

Din a treia ecuație de echilibru (o sumă de momente față de centrul **G** al elementului) rezultă:

$$\tau_{xy} \cdot dy \cdot l \cdot \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \cdot l \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot l \cdot \frac{dy}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot l \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

Împărțind ecuația prin $\frac{dx dy}{2}$ și apoi făcând $dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0$ se obține:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

În mod similar pentru starea generală de tensiuni se folosesc egalitățile:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}\end{aligned}\tag{62}$$

Ecuațiile (62) exprimă **principiul dualității tensiunilor tangențiale** cu următorul enunț: *pe două elemente de suprafață ortogonale componentele tensiunilor tangențiale sunt egale, opuse și perpendiculare pe muchia comună.* Acest principiu este valabil pentru toate punctele corpului solicitat oricare ar fi natura sarcinilor aplicate și proprietățile materialului.

6.2. Ecuații geometrice (între deformații și deplasări)

Ca rezultat al solicitării corpurile se deformează și apar deplasări. Se vor stabili relații geometrice între deformațiile specifice ϵ , γ și componentele deplasării volumului elementar u , v , w , ecuații valabile pentru orice material. Pentru ușurință demonstrația se va face pentru cazul *stării plane de deformații*. Prin *stare plană de deformație* se înțelege starea la care au loc deformații numai într-un singur plan (de exemplu deformațiile ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , γ_{xy} în planul xOy).

Sub acțiunea forțelor exterioare elementul din *figura 32* se deformează (își modifică lungimea laturilor precum și unghiul inițial drept dintre fețele acestuia). Întrucât studiul deformațiilor, pe care le obține elementul de volum în ansamblu, este o problemă dificilă se preferă să se studieze separat deformațiile proiecțiilor acestuia pe planele de coordonate. Se analizează proiecția $OABC$ a elementului de volum paralelipipedic în planul xOy , înainte și după deplasare, respectiv deformarea acestuia (*figura 32*).

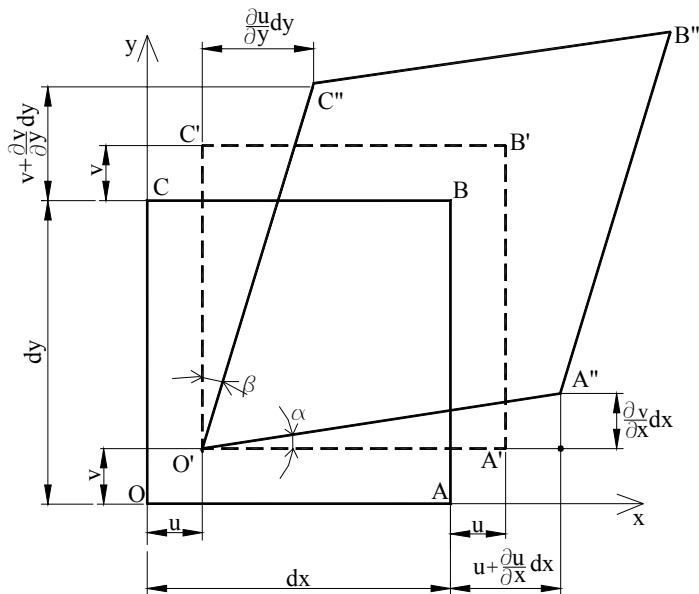


Figura 32

Componentele deplasărilor u , v pe axele Ox și Oy variază. Dacă punctul O are deplasările u și v atunci punctele A și C vor avea aceste deplasări plus

creșterile diferențiale obținute prin modificarea coordonatelor punctelor (*figura 32*). Deplasarea totală a punctului A pe direcția Ox este $\Delta A_x = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$, iar alungirea pe această direcție este:

$$\Delta dx = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Alungirea specifică pe aceeași direcție este dată de relația:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

În mod analog pe direcția Oy se obține:

$$\Delta dy = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

În mod analog se determină alungirea specifică în direcția Oz , încât pentru starea spațială de deformății se poate scrie:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{63}$$

Înăfara deplasării în lungul axei Ox punctul A are și o deplasare în lungul axei Oy : $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$, iar punctul B are o deplasare în lungul axei Ox : $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$.

Dreptunghiul elementar $OABC$ se transformă în paralelogramul $O'A''B''C''$. Latura $O'A'$ se înclină cu unghiul α (întrucât unghiul este foarte mic, se poate accepta că este egal cu valoarea tangentei trigonometrice):

$$tg\alpha \approx \alpha = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \approx \frac{\partial v}{\partial x}$$

unde la numitor s-a neglijat $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$ față de unitate.

Latura $\mathbf{O'C'}$ se rotește cu unghiul β și în mod analog rezultă:

$$tg\beta \approx \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

În aceste condiții lunecarea specifică în planul $\mathbf{xOy}$ este dată de relația:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Prin permutări se obțin lunecările specifice în celelalte două plane. Pentru starea generală de deformății se poate scrie:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned} \tag{64}$$

Așa cum deja s-a precizat pentru materialele izotrope lunecările specifice nu depind de sensul deformării și în consecință se poate scrie:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

Pentru starea plană de deformăție *relațiile (63), (64)* se reduc la:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned} \tag{65}$$

Cele trei deformații nu sunt independente ele fiind funcții de u și v . Ele. Pentru a stabili relația dintre acestea se calculează:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\end{aligned}\tag{66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}\end{aligned}\tag{67}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}\tag{68}$$

Din relațiile (66), (67), (68) se observă că:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}\tag{69}$$

Relația (69) exprimă faptul că materialul este continuu și poartă numele de **ecuația de continuitate** sau de **compatibilitate** a deformațiilor.

6.3. Ecuații constitutive (fizice)

Este absolut necesar să se stabilească o legătură între tensiuni și deformații. Acesta legătură se determină experimental, tensiunile și deformațiile fiind legate fizic prin legea de comportare a materialului sub acțiunea sarcinilor. Altfel spus: *un anumit material se deformează într-un anumit fel sub acțiunea unui anumit efort și invers în interiorul corpului se dezvoltă anumite tensiuni când acesta se deformează într-un anumit fel.* În acest grup de ecuații intervin caracteristicile fizice de material și în consecință *ele nu mai sunt valabile și pentru materiale*

ortotrope, decât în câteva situații particulare. Din acest motiv, ecuațiile constitutive vor fi prezentate separat.

Material anizotrop.

Starea spațială de tensiuni

Ecuațiile constitutive sau fizice (dintre *deformații-tensiuni* sau *tensiuni-deformații*) pot fi exprimate mai comod sub formă matriceală. Cazul general este cel al materialului anizotrop. Pentru acest material relațiile constitutive pot fi scrise matriceal astfel:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} & \bar{S}_{15} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} & \bar{S}_{25} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} & \bar{S}_{35} & \bar{S}_{36} \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{46} \\ \bar{S}_{51} & \bar{S}_{52} & \bar{S}_{53} & \bar{S}_{54} & \bar{S}_{55} & \bar{S}_{56} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{63} & \bar{S}_{64} & \bar{S}_{65} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

Relația (54) poate fi scrisă simbolic:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = [\bar{S}_{ij}] \{\sigma_{ij}\} \quad (71)$$

unde $[\bar{S}_{ij}]$ se numește *matrice de complianță sau de elasticitate*.

Termenii S_{ij} sunt caracteristici elastice ale materialului. În sistemul principal de axe ale materialului, termenii matricei de complianță sunt:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= \frac{1}{E_{11}}; \bar{S}_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_{22}}; \bar{S}_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_{33}}; \bar{S}_{14} = \frac{\eta_{11,23}}{G_{23}}; \bar{S}_{15} = \frac{\eta_{11,31}}{G_{31}}; \bar{S}_{16} = \frac{\eta_{11,12}}{G_{12}}; \\ \bar{S}_{21} &= -\frac{\nu_{21}}{E_{11}}; \bar{S}_{22} = \frac{1}{E_{22}}; \bar{S}_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_{33}}; \bar{S}_{24} = \frac{\eta_{22,23}}{G_{23}}; \bar{S}_{25} = \frac{\eta_{22,31}}{G_{31}}; \bar{S}_{26} = \frac{\eta_{22,12}}{G_{12}}; \\ \bar{S}_{31} &= -\frac{\nu_{31}}{E_{11}}; \bar{S}_{32} = -\frac{\nu_{32}}{E_{22}}; \bar{S}_{33} = \frac{1}{E_{33}}; \bar{S}_{34} = \frac{\eta_{33,23}}{G_{23}}; \bar{S}_{35} = \frac{\eta_{33,31}}{G_{31}}; \bar{S}_{36} = \frac{\eta_{33,12}}{G_{12}}; \\ \bar{S}_{41} &= \frac{\eta_{23,11}}{E_{11}}; \bar{S}_{42} = \frac{\eta_{23,22}}{E_{22}}; \bar{S}_{43} = \frac{\eta_{23,33}}{E_{33}}; \bar{S}_{44} = \frac{1}{G_{23}}; \bar{S}_{45} = \frac{\mu_{23,31}}{G_{31}}; \bar{S}_{46} = \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}}; \end{aligned} \quad (72)$$

$$\bar{S}_{51} = \frac{\eta_{31,11}}{E_{11}}; \bar{S}_{52} = \frac{\eta_{31,22}}{E_{22}}; \bar{S}_{53} = \frac{\eta_{31,33}}{E_{33}}; \bar{S}_{54} = \frac{\mu_{31,23}}{G_{23}}; \bar{S}_{55} = \frac{1}{G_{31}}; \bar{S}_{56} = \frac{\mu_{31,12}}{G_{12}};$$

$$\bar{S}_{61} = \frac{\eta_{12,11}}{E_{11}}; \bar{S}_{62} = \frac{\eta_{12,22}}{E_{22}}; \bar{S}_{63} = \frac{\eta_{12,33}}{E_{33}}; \bar{S}_{64} = \frac{\mu_{12,23}}{G_{23}}; \bar{S}_{65} = \frac{\mu_{12,31}}{G_{31}}; \bar{S}_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

unde: E_{ii} = modul de elasticitate longitudinală (*Young*), determinat de direcția axei Oi ;

G_{ij} = modul de elasticitate transversală (*Coulomb*), determinat în planul iOj ;

ν_{ij} = coeficientul lui *Poisson* care caracterizează alungirea specifică pe direcția Oj , produsă de către tensiunea normală σ_{ii} , cu $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$;

$\mu_{ij,ik}$ = coeficienți de lunecare transversală (*Cențov*), care caracterizează lunecările dintr-un plan de coordonate iOk , produse de către tensiunile tangențiale care acționează într-un plan paralel cu un alt plan de coordonate iOj , cu $\mu_{ij,ik} \neq \mu_{ik,ij}$;

$\eta_{ii,jk}$ = coeficienți de influență reciprocă de prima speță, care caracterizează lunecarea γ_{ij} produsă de către tensiunea normală σ_{ii} ;

$\eta_{jk,ii}$ = coeficienți de influență reciprocă de a doua speță, care caracterizează alungirea specifică ϵ_{ii} , produsă de către tensiunea tangențială τ_{jk} .

Observații:

- Matricea fiind simetrică față de diagonala principală ($\bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ji}$), dintre cele 36 de caracteristici elastice, numai 21 sunt independente.
- Se remarcă faptul că, spre deosebire de materialele izotrope, la cele anizotrope tensiunile tangențiale pot produce alungiri specifice, iar tensiunile normale pot produce lunecări.

Invers, tensiunile pot fi exprimate funcție de deformații sub forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{14} & \bar{Q}_{15} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{24} & \bar{Q}_{25} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{34} & \bar{Q}_{35} & \bar{Q}_{36} \\ \bar{Q}_{41} & \bar{Q}_{42} & \bar{Q}_{43} & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{46} \\ \bar{Q}_{51} & \bar{Q}_{52} & \bar{Q}_{53} & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{56} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{63} & \bar{Q}_{64} & \bar{Q}_{65} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (73)$$

sau, simbolic: $\{\sigma_{ij}\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon_{ij}\}$ (74)

unde $[\bar{Q}] = [\bar{S}]^{-1}$ se numește *matrice de rigiditate*.

Starea plană de tensiuni

În acest caz particular, relațiile constitutive pot fi exprimate matriceal astfel:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{61} & \bar{S}_{62} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

și respectiv

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

cu matricele $[\bar{S}]$ și $[\bar{Q}]$ simetrice față de diagonala principală.

Material ortotrop

Starea spațială de tensiuni

Ortotropia este un caz particular al anizotropiei. La materialul ortotrop există 3 *plane de simetrie ale caracteristicilor elastice*. Pentru cazul sollicitărilor pe direcțiile principale ale materialului, relațiile constitutive cunoscute și sub denumirea de *legea lui Hooke* în spațiu pot fi scrise matriceal astfel:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (77)$$

unde:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}}; S_{12} = S_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}}; S_{13} = S_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{31}}{E_{33}}; \\ S_{22} &= \frac{1}{E_{22}}; S_{23} = S_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} = -\frac{\nu_{32}}{E_{33}}; S_{33} = \frac{1}{E_{33}}; \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}; S_{55} = \frac{1}{G_{31}}; S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (78)$$

Observație:

- Elasticitatea materialului ortotrop este definită de 9 caracteristici elastice independente.

Starea plană de tensiuni

Pentru starea plană de tensiuni relația (77) devine:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (79)$$

Material izotrop

Starea spațială de tensiuni

Elasticitatea materialului izotrop este definită de către trei caracteristici elastice:

E – modulul de elasticitate longitudinală (Young),

G - modulul de elasticitate transversală,

ν - coeficientul de contracție transversală (coeficientul Poisson),
dintre care numai *două sunt independente*.

Între aceste caracteristici există relația:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (80)$$

De asemenea trebuie precizat că spre deosebire de materialele anizotrope la materialele izotrope nu există influențe reciproce între alungirile specifice ε și lunecările γ .

Particularizând pentru corpul *izotrop* aflat în stare spațială de tensiuni, relațiile constitutive pot fi scrise tot sub forma *relațiilor (70)*, unde:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = \frac{1}{E}; S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} = -\frac{\nu}{E};$$

$$S_{44} = S_{55} = S_{66} = \frac{1}{G} \quad (81)$$

Ținând cont de *relațiile (70) și (81)*, relațiile constitutive pentru materialul izotrop aflat în stare spațială de tensiuni pot fi scrise explicit sub următoarea formă:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (82)$$

Se observă că din *sistemul de ecuații (82)*, pentru corpul izotrop aflat în stare spațială de tensiuni, relațiile constitutive pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]
\end{aligned} \tag{83}$$

respectiv:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \tag{84}$$

Relațiile reprezintă **legea lui Hooke pentru starea spațială de tensiuni** sau **legea lui Hooke generalizată** pentru materiale omogene și izotrope .

Din *relațiile (84)* pot fi determinate tensiunile funcție de deformații:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\
\sigma_{zz} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]
\end{aligned} \tag{85}$$

Starea plană de tensiuni

Pentru starea plană de tensiuni, relațiile constitutive se scriu sub forma *relației (77)* cu:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{E}; \quad S_{12} = S_{21} = -\frac{\nu}{E}; \quad S_{66} = \frac{1}{G} \tag{86}$$

Din *relațiile (77)* și (86) rezultă:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{87}$$

Dezvoltând se obține **legea lui Hooke generalizată** pentru starea plană de tensiuni:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})\end{aligned}\tag{88}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\tag{89}$$

Din (88) și (89) se exprimă tensiunile funcție de deformații:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{90}$$

Pentru direcțiile principale *relațiile* (88), (89) devin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)\end{aligned}\tag{91}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)\end{aligned}\tag{92}$$

Starea uniaxială de tensiuni

Pentru starea uniaxială de tensiuni (de exemplu tracțiune pe direcția axei **Ox**) *relațiile* (89) devin:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= -\nu\sigma_{xx}\end{aligned}\tag{93}$$

Din prima relație (93), exprimând tensiunile funcție de deformații, rezultă binecunoscuta lege a lui Hooke:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (94)$$

De reținut

Teoria elasticității stabilește noțiuni și relații care permit determinarea stării de tensiuni, stării de deformație și stării de deplasare pentru un corp solid deformabil.

În plan pentru cunoașterea completă a stării de tensiune, deformație și deplasare a corpului elastic trebuie cunoscute următoarele opt funcții de poziția punctului (x,y):

- **starea de tensiuni:** $\sigma_x = F_1(x,y)$

$$\sigma_y = F_2(x,y)$$

$$\tau_{xy} = F_3(x,y)$$

- **starea de deformații:** $\varepsilon_x = F_4(x,y)$

$$\varepsilon_y = F_5(x,y)$$

$$\gamma_{xy} = F_6(x,y)$$

- **starea de deplasare:** $u = F_7(x,y)$

$$v = F_8(x,y)$$

Pentru determinarea celor opt funcții trebuie rezolvate următoarele ecuații ale elasticității în plan:

- **ecuațiile diferențiale de echilibru (relațiile (60)):**

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0$$

- **ecuațiile de deformații (relațiile (65)):**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- *ecuația de compatibilitate (relația (69)):*

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

- *legea lui Hooke (relațiile (88), (89) sau (90)):*

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

sau

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx})$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

7. Energia potențială de deformare

7.1. Energia potențială de deformare pentru bare drepte

7.1.1. Energia potențială de deformare specifică

La încărcarea unui corp solid elastic deformabil forțele exterioare cresc treptat de la zero la valoarea lor întreaga (încărcare statică). În urma deformării

corpului punctele de aplicație ale forțele exterioare se deplasează producând astfel un lucru mecanic exterior, iar energia potențială de poziție a forțelor exterioare se schimbă. Până la limita de elasticitate lucrul mecanic cheltuit pentru deformarea corpului nu se pierde ci se înmagazinează în corpul solid deformat, acesta acumulând **energie potențială elastică de deformare**. Când forțele exterioare sunt îndepărtate, această energie potențială de deformare readuce corpul la forma și dimensiunile inițiale. În cele ce urmează se va prezenta calculul energiei de deformare presupunând că lucrul mecanic al forțelor exterioare se acumulează integral sub formă de energie potențială elastică, se neglijează deci energia disipată în acest proces.

Ipotezele pe baza cărora se face calculul energiei de deformare sunt:

- materialul este solicitat cel mult până la limita de elasticitate (are o comportare perfect elastică), fiind valabilă *legea lui Hooke*;
- forțele exterioare sunt aplicate static (viteza de deformare este foarte mică, deci energia cinetică este practic nulă);
- se neglijează efectele termice, piezoelectrice, emisiile ultrasonore care însoțesc fenomenul deformării corpurilor, energia disipată de aceste fenomene fiind mult mai mică decât cea de deformare elastică;
- se neglijează frecările interioare și frecările în reazeme.

Se determină în continuare energia de deformare înmagazinată de unitatea de volum numită **energie specifică de deformare**. Dintr-un corp solid, elastic deformabil se izolează un element de volum, cu latura egală cu unitatea (*figura 33*). Cubul este orientat astfel încât două fețe paralele să fie normale pe axa barei (muchiile perpendiculare pe aceste fețe sunt paralele cu axa barei) Se determină mai întâi energia potențială de deformare în cazul întinderii uniaxiale (cubul este supus la tracțiune cu tensiunea σ). Forța finală care acționează în direcția solicitării este $F = \sigma l l$ (produsul dintre tensiunea σ și suprafața pe care acționează). Sub acțiunea acestor tensiuni normale laturile cubului paralele cu axa barei se vor

alungi. Unitatea de lungime este foarte mică și alungirea sa este ε . Pentru o deplasare a forței pe direcția ei cu ε aceasta produce un lucru mecanic egal cu energia potențială de deformare acumulată de elementul reprezentat în *figura 33* (datorită faptului că latura cubului este egală cu unitatea σ și ε joacă rolul de forță, respectiv de alungire).

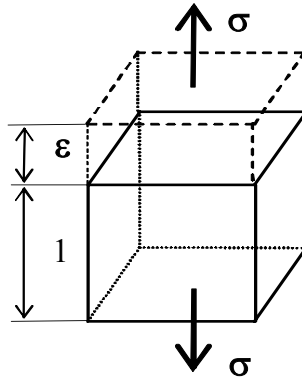


Figura 33

Ținând cont de **prima teoremă a lui Clapeyron** (care se enunță astfel: *pentru un corp elastic aflat în repaus, lucrul mecanic exterior produs de către sarcini este egal cu energia potențială de deformare acumulată de către acel corp*) se poate scrie:

$$L_{el} = U_l = \frac{\sigma}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \varepsilon = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} \quad (95)$$

În relație factorul $\frac{1}{2}$ rezultă din ceea ce a fost demonstrat în cursul de *Rezistența materialelor* și anume că pentru *deplasări liniar-elastice lucrul mecanic al unei forțe exterioare egal cu semi-produsul dintre forță și deplasarea pe direcția forței*. Relația (95) reprezintă expresia energiei de deformare specifică acumulată în unitatea de volum pentru tracțiunea simplă și este numeric egală cu aria triunghiului hașurat din *figura 34*.

Similar, pentru forfecare sau torsiune se poate scrie:

$$U_l = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} \quad (96)$$

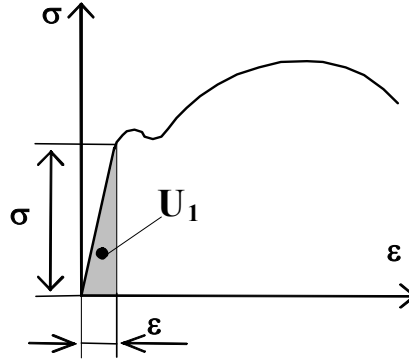


Figura 34.

Ținând cont de legea lui Hooke, din *relațiile* (95) și (96) rezultă:

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (97)$$

$$U_1 = \frac{\tau^2}{2G}$$

7.1.2. Energia potențială de deformare elementară și totală

Dacă se izolează din același corp un paralelipiped elementar având muchia dx paralelă cu axa barei, elementul de volum va fi:

$$dV = dA dx = dx dy dz$$

Când pe fețele dA vor acționa tensiuni, **energia potențială de deformare elementară** (energia potențială de deformare înmagazinată de un element de volum dV) se obține înmulțind energia de deformare specifică cu volumul elementului. Prin urmare:

$$dU = U_1 \cdot dV \quad (98)$$

sau particularizând pentru cele două tensiuni rezultă:

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad (99)$$

$$dU = \frac{\tau^2}{2G} dV$$

Prin **energie potențială de deformare totală** se înțelege suma energiilor elementare extinsă la întregul volum al barei. Înlocuind *relațiile* (99), rezultă formulele pentru determinarea energiei potențiale de deformare înmagazinată în volumul V :

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (100)$$

7.1.3. Energia potențială de deformare totală a barelor drepte

Se va determina energia totală pentru fiecare solicitare simplă.

Solicitări axiale

Ținând cont că $\sigma = \frac{N}{A}$ din prima *relație* (100) rezultă:

$$U = \int_V \left(\frac{N}{A} \right)^2 \frac{1}{2E} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA^2} dx \int_A dA = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx \quad (101)$$

Dacă secțiunea și forța axială sunt constante în lungul barei, integrala din *relația* (101) se calculează și rezultă:

$$U = \frac{N^2 l}{2EA} \quad (102)$$

Încovoiere

Ținând cont că $\sigma = \frac{My}{I_z}$ din prima *relație* (100) rezultă:

$$U = \int_V \left(\frac{My}{I_z} \right)^2 \frac{1}{2E} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI_z^2} dx \int_A y^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI_z} dx \quad (103)$$

Dacă secțiunea și momentul încovoietor sunt constante în lungul axei barei, se calculează integrala din *relația* (103) și se obține:

$$U = \frac{M^2 l}{2EI_z} \quad (104)$$

Lunecare

Înlocuind *relația lui Juravski* $\tau = \frac{TS_z}{bI_z}$ în a doua *relație (100)* rezultă:

$$U = \frac{1}{2G} \int_V \left(\frac{TS_z}{bI_z} \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GA} dx \int_A \frac{AS_z^2}{b^2 I_z^2} dA = \frac{k}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GA} dx \quad (105)$$

În *relația (105)* a doua integrală este un coeficient adimensional a cărui valoare depinde de forma secțiunii transversale și care este dat de relația:

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2}{b^2} dA$$

Torsiune

Ținând cont că $\tau = \frac{M_t r}{I_p}$ (pentru barele circulare pline și tubulare) din a doua *relație (100)* rezultă:

$$U = \int_V \left(\frac{M_t \cdot r}{I_z} \right)^2 \frac{1}{2G} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2}{GI_p^2} dx \int_A r^2 dA = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2}{GI_p} dx \quad (106)$$

Dacă secțiunea și momentul de torsiune sunt constante în lungul axei barei, se calculează integrala din *relația (106)* și se obține:

$$U = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} \quad (107)$$

Observații:

- Dacă bara este supusă simultan la mai multe solicitări simple energia potențială de deformare se obține prin însumarea termenilor

corespunzători fiecărei solicitări. Ținând cont de relațiile (102), (104), (105) și (107) rezultă:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI_z} dx + \frac{k}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2}{GI_p} dx \quad (108)$$

- Dacă corpul se compune din mai multe bare se va face suma energiilor potențiale de deformare referitoare la fiecare bară.
- Pentru barele care sunt solicitate la încovoiere energia potențială de deformare din încovoiere este preponderentă față de aceea provenind din forța axială și forța tăietoare.
- Energia potențială de deformare fiind o funcție pătratică de eforturile secționale însumarea termenilor corespunzători fiecărei solicitări nu se datorează aplicării principiului suprapunerii efectelor, ci faptului că energia este o mărime scalară.

7.2. Energia potențială de deformare specifică pentru starea spațială și plană de tensiuni

Dacă se trece de la problema barelor (monoaxială) la problema plană (biaxială), respectiv spațială (triaxială) energia potențială de deformare va fi suma energiilor după cele două, respectiv trei direcții datorită faptului că este o mărime scalară. În continuare se va trata doar energia de deformare specifică.

Dacă asupra elementului se aplică tensiuni normale pe toate cele trei direcții ținând cont de *relația* (95) se obține:

$$U_I = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) \quad (109)$$

Dacă pe lângă tensiunile normale asupra elementului acționează și tensiuni tangențiale, ținând cont de *relația* (96) rezultă expresia generală a **energiei potențiale de deformare specifică pentru starea spațială de tensiune**:

$$U_I = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (110)$$

Dacă se înlocuiesc deformațiile liniare și deformațiile unghiulare cu relațiile date de *legea lui Hooke generalizată* se obține:

$$U_I = \frac{I}{2E}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + \frac{I}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (111)$$

Se observă că energia potențială de deformare specifică este funcție pătratică de tensiuni.

Din *relația (111)* se poate stabili formula valabilă pentru starea plană de tensiune ($\sigma_{zz} = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$):

$$U_I = \frac{I}{2E}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2) - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \frac{I}{2G}\tau_{xy}^2 \quad (112)$$

Prin particularizarea *relației (112)* se determină relațiile de calcul pentru energia potențială specifică de deformare în cazul sollicitării de tracțiune simplă ($\sigma_{yy} = 0, \tau_{xy} = 0$) și forfecare pură ($\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = 0$). Se regăsesc în acest fel *relațiile (97)*.

În cazul când axele de coordonate coincid cu axele principale ale stării de tensiune expresia pentru energia potențială de deformare specifică are următoarea formă pentru starea spațială de tensiune, respectiv pentru starea plană de tensiune:

$$U_I = \frac{I}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (113)$$

$$U_I = \frac{I}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \frac{\nu}{E}\sigma_1\sigma_2$$

7.3. Energia specifică necesară variației de volum și schimbării formei

Când un corp solid elastic este supus acțiunii unor sarcini exterioare el se deformează. Deformația corpului poate fi separată în două:

- o variație de volum (corpul rămânând asemenea cu forma sa inițială);
- o schimbare a formei.

Corespunzător acestor două aspecte, energia de deformare specifică acumulată de corp poate fi considerată ca suma dintre energia necesară variației de volum și energia necesară variației formei:

$$U_I = U_{Iv} + U_{If} \quad (114)$$

Dacă presupunem că pe toate fețele cubului elementar acționează aceeași tensiune $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, care are rolul unei presiuni hidrostatice, se obține numai variația de volum și deci energia va fi folosită numai pentru modificarea volumului.

Energia de variație a volumului este:

$$U_{Iv} = \frac{1}{2E} 3\sigma_m^2 - \frac{\nu}{E} 3\sigma_m^2 = \frac{3\sigma_m^2}{2E} (1 - 2\nu)$$

sau înlocuind pe σ_m și efectuând calculele se obține:

$$U_{Iv} = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

sau

$$U_{Iv} = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 \quad (115)$$

Se observă că pentru $\nu = \frac{1}{2}$ rezultă $U_{Iv} = 0$, adică deformarea corpului se produce fără deformare de volum. Cum $U_{Iv} > 0$ rezultă că $\nu < 1/2$.

Diferența dintre energia totală și cea de variație a volumului reprezintă **energia de variație a formei**. Prin urmare:

$$U_{If} = U_I - U_{Iv} \quad (116)$$

Se introduc *relațiile* (2.97) și (2.99). După efectuarea calculelor se ajunge la următoarea relație pentru calculul **energiei de variație a formei**:

$$U_{If} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (117)$$

sau

$$U_{If} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (118)$$

8. Teorii de rupere (de rezistență)

Alegerea coeficientului de siguranță se face în raport cu valorile limită σ_c sau σ_r pentru stabilirea tensiunii admisibile, adică:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_L}{c} \quad (119)$$

unde σ_L reprezintă tensiunea normală care caracterizează starea limită.

Se consideră drept *stare de tensiune limită* a materialului starea de tensiuni care corespunde fie începerii ruperii materialului, fie începerii apariției unui proces fizic care dintr-un motiv oarecare este considerat ca inadmisibil, nedorit sau periculos.

În starea monoaxială de tensiune aceste valori se obțin direct în urma încercărilor de laborator la întindere sau compresiune. Pentru un element aflat într-o stare de tensiune caracterizată prin tensiunile principale σ_1 , σ_2 , σ_3 determinate, calculul coeficientului de siguranță necesită determinarea experimentală a tensiunilor limită σ_{L1} , σ_{L2} , σ_{L3} și se determină cu relația:

$$c = \frac{\sigma_{L1}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{L2}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{L3}}{\sigma_3} \quad (120)$$

Aceste determinări experimentale se realizează rar în practică datorită numărului mare de încercări, a instalațiilor și a mașinilor complicate și costisitoare.

Necesitatea de a compara stările de tensiune din diferite puncte ale corpului, de a stabili punctul cel mai periculos și de a determina coeficientul de siguranță, impune găsirea unui criteriu de apariție a curgerii sau a unui criteriu de rezistență, adică a unui factor cu ajutorul căruia s-ar putea aprecia pericolul stării de tensiune și s-ar putea stabili locurile cele mai solicitate ale pieselor, fără a mai recurge la o încercare în fiecare caz în parte.

Compararea stărilor de tensiune se poate face ușor dacă se alege drept bază una din stările de tensiune, cea mai caracteristică și cea mai ușor de realizat experimental și apoi folosind criteriul adoptat se compară cu această stare de tensiune toate celelalte. Această stare de tensiune luată drept bază se numește ***echivalentă***. Drept ***stare echivalentă*** se ia starea monoaxială de tensiune, întrucât aceasta se poate realiza ușor fără a fi necesare mașini și dispozitive complicate, epruvetele au o formă simplă și sunt ușor de realizat, iar starea de tensiuni din porțiunea de calcul a epruvetei este omogenă.

Tensiunea echivalentă este tensiunea principală a unui element imaginar supus la întindere, executat din același material ca și elementul dat și care se află într-o stare de tensiuni tot atât de periculoasă ca și elementul dat.

S-au emis mai multe ipoteze asupra ruperii materialelor. Alegerea uneia dintre ipoteze este determinată de modul în care se verifică experimental aceasta pentru starea de tensiuni considerată. Prin urmare teoriile de rupere vor da expresiile tensiunii echivalente σ_{echiv} care fac posibilă compararea stării complexe de solicitare cu cea de întindere simplă. În urma determinării tensiunii echivalente relația de verificare pentru piesă este:

$$\sigma_{echiv} \leq \sigma_a \quad (121)$$

Exista cinci teorii de rezistență clasice:

- *ipoteza tensiunii normale maxime (Galilei, Rankine);*

- ipoteza deformației specifice liniare maxime (Mariotte, Saint Venant);
- ipoteza tensiunii tangențiale maxime (Coulomb, Guest, Tresca);
- ipoteza energiei potențiale totale de deformație (Beltrami, Haigh);
- Ipoteza energiei de deformație modificatoare de formă (Huber, Hencky, R von Mises);

Teoria stării limită a lui Mohr este o generalizare a teoriilor de mai sus ce exprima într-o formă unitară starea limită dintr-un corp și ține seama de comportarea diferită a unor materiale la sollicitările de întindere și compresiune.

Valabilitatea unei teorii de rezistență se poate atesta cu ajutorul determinărilor experimentale pentru anumite stări particulare de sollicitare.

8.1. Ipoteza tensiunii normale maxime

Această ipoteză admite că starea limită se atinge atunci când tensiunea normală maximă din corp atinge valoarea tensiunii stării limită de la sollicitarea de întindere monoaxială.

Dacă se consideră starea spațială de tensiuni cu tensiunile principale σ_1 , σ_2 , σ_3 având respectată inegalitatea $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ atunci starea periculoasă apare atunci când

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_{echiv} \quad (122)$$

Conform acestei ipoteze valorile celorlalte două tensiuni principale nu au nici o influență asupra trecerii materialului într-o stare de tensiuni periculoasă. În cazul stării plane de tensiune tensiunile principale sunt date de relația:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (123)$$

$\sigma_{max} = \sigma_1$ și prin urmare:

$$\sigma_{echiv} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (124)$$

Dacă $\sigma_{xx} = \sigma$; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = \tau$ se obține:

$$\sigma_{echiv} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

sau

$$\sigma_{echiv} = 0,5\sigma + 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (125)$$

Aceasta teorie nu tine seama de valorile diferite ale rezistentei la intindere si respectiv la compresiune a unor materiale. Rezultatele experimentale confirmă această ipoteză în cazul ruperii materialelor fragile când tensiunea normală maximă este o tensiune de întindere. Se aplică cu succes pentru predicția ruperii unor corpuri executate din materiale fragile supuse la solicitări statice. Ipoteza nu poate fi folosită drept criteriu de rezistență în cazul unei stării compuse de tensiuni deoarece în general conduce la supradimensionarea pieselor.

8.2. Ipoteza deformației specifice liniare maxime

După această ipoteză *apariția stării periculoase este determinată de valoarea lungirii sau scurtării specifice maxime, atunci când aceasta este egală cu deformația periculoasă ε_{echiv} .*

Deformațiile specifice, în cazul solicitării spațiale, sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \quad (126)$$

Presupunând $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ criteriul este:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = \varepsilon_{echiv} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (127)$$

Starea de tensiuni este considerată drept stare de tensiune limită dacă mărimea ε_{max} este egală cu deformația liniară maximă din starea monoaxială de tensiuni, adică:

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{echiv}}{E} \quad (128)$$

Egalând ultimile două relații se obține:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (129)$$

În cazul stării plane de tensiune relația devine:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 \quad (130)$$

Dacă în *relația (130)* se introduc tensiunile σ_1 , σ_2 în care se consideră $\sigma_{xx} = \sigma$; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = \tau$ și $\nu=0,3$ se obține:

$$\sigma_{echiv} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (131)$$

Această ipoteză se remarcă în cazul materialelor fragile, unde rezultatele obținute folosind aceasta teorie sunt foarte apropiate de cele obținute experimental.

8.3. Ipoteza tensiunii tangențiale maxime

Acest criteriu are la bază observațiile experimentale conform cărora la materialele ductile curgerea este rezultatul lunecărilor în lungul unor plane ale cristalelor sub acțiunea tensiunilor tangențiale. În baza acestei teorii, *starea limită se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă atinge valoarea tensiunii tangențiale corespunzătoare stării limită de la încercarea de întindere monoaxială.*

Tensiunile tangențiale sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \quad (132)$$

Ținând cont de inegalitatea $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ rezultă că tensiunea tangențială maximă este τ_2 și prin urmare:

$$\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (133)$$

În cazul stării de tensiune monoaxială, considerată ca stare echivalentă, tensiunea tangențială maximă are valoarea:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{echiv}}{2} \quad (134)$$

Din ultimile două relații rezultă:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (135)$$

Pentru starea plană de tensiune ultima relație devine:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

iar în cazul particular al barelor la care $\sigma_{xx} = \sigma$; $\sigma_{yy} = 0$; $\tau_{xy} = \tau$ relația devine:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (136)$$

Un dezavantaj al acestei ipoteze îl constituie faptul că nu ține cont de influența tensiunii normale principale σ_2 . Ipoteza tensiunii tangențiale maxime a fost verificată experimental mai ales pentru materialele tenace la solicitările de întindere biaxială și stările de tensiune biaxiale mixte. Ea este confirmată în cazul materialelor care au aceeași rezistență la întindere și la compresiune. Intrucat din conditiile de rezistenta corespunzatoare acestei teorii lipseste coeficientul de contractie transversala aceasta teorie poate fi folosita si in domeniul plastic ca si criteriu de plasticitate.

8.4. Ipoteza energiei potentiale totale de deformare

Această ipoteză consideră că starea periculoasă este atinsă atunci când energia de deformare specifică acumulată de piesă este egală cu energia specifică corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă. Energia potențială de deformare specifică este dată de relația:

$$U_1 = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (137)$$

Pentru starea de tensiune monoaxială echivalentă ($\sigma_1 = \sigma_{echiv}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) relația devine:

$$U_{1echiv} = \frac{\sigma_{echiv}^2}{2E} \quad (138)$$

Egalând energia potențială specifică acumulată de materialul care se află în starea de tensiune studiată cu energia potențială specifică a aceluiași material aflat în starea de tensiune echivalentă se obține:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \quad (139)$$

Pentru starea plană de tensiune $\sigma_3 = 0$ și relația devine:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2} \quad (140)$$

Înlocuind în relația de mai sus pe σ_1 și σ_2 și după efectuarea calculelor se obține:

$$\sigma_{echiv}^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - 2\nu\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2 \quad (141)$$

Dacă $\sigma_{xx} = \sigma; \sigma_{yy} = 0; \tau_{xy} = \tau$ și $\nu=0,3$ relația devine:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 2,6\tau^2} \quad (142)$$

Această ipoteză a fost verificată experimental în anumite cazuri de materialele tenace.

8.5. Ipoteza energiei de deformare modificatoare de formă

Conform acestei ipoteze starea periculoasă este produsă nu de energia de deformare totală, ci numai de energia de deformare modificatoare de formă. Prin urmare se adoptă drept criteriu de rezistență cantitatea de energie potențială specifică de variație a formei acumulată de materialul deformat în punctul considerat. Această energie se calculează cu relația:

$$U_{If} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (143)$$

Luând ca stare echivalentă solicitarea monoaxială de întindere ($\sigma_1 = \sigma_{echiv}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) se obține pentru energia potențială specifică de variație a formei următoarea expresie:

$$U_{Ifechiv} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{echiv}^2 \quad (144)$$

Egalând cantitatea de energie potențială specifică de variație a formei acumulată de elementul considerat cu cantitatea de energie potențială specifică de variație a formei acumulată de elementul aflat în starea de tensiune echivalentă se obține:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (145)$$

Pentru starea plană de tensiune $\sigma_3 = 0$ și relația devine:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (146)$$

Înlocuind în relația de mai sus pe σ_1 și σ_2 și după efectuarea calculelor se obține:

$$\sigma_{echiv}^2 = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2 \quad (147)$$

Dacă $\sigma_{xx} = \sigma; \sigma_{yy} = 0; \tau_{xy} = \tau$ relația devine:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (148)$$

Unul dintre avantajele ipotezei îl constituie faptul că în *relația (145)* intră cu drepturi egale toate cele trei tensiuni normale principale. Această ipoteză se verifică experimental pentru materialele tenace. De asemenea aceasta se verifică și pentru *starea plastică* a materialului.

Ipoteza energiei de deformare modificatoare de formă se aplica în cazul solicitărilor preponderent de compresiune și concorda cu rezultatele experimentale obținute în cazul compresiunii triaxiale uniforme. Ca și teoria tensiunilor

tangențiale maxime, teoria energiei potențiale specifice de variație a formei este o teorie de lunecare și prezintă aceleași avantaje.

Această ultimă ipoteză corespunde mai bine cu realitatea decât toate celelalte ipoteze. De asemenea trebuie remarcat faptul că între această ipoteză de rupere și cea a tensiunilor tangențiale maxime există diferențe foarte mici, în momentul de față aceste două ipoteze având o largă utilizare.

8.6. Teoria stării limită a lui Mohr

Teoria stării limită a lui Mohr este o generalizare a teoriilor clasice prezentate anterior. Conform acestei teorii starea limită într-un corp se atinge atunci când de produc lunecări după plane în care tensiunile tangențiale sunt maxime sau primele deformări din corp se produc atunci când tensiunea tangențială maximă dintr-un plan de alunecare atinge valoarea maximă corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă.

Conform acestei teorii starea periculoasă apare în momentul în care starea de tensiuni dintr-un punct a atins o stare limită care este caracteristică fiecărui material. Starea spațială de tensiuni principale se poate reprezenta în plan cu ajutorul *cercului lui Mohr*. Presupunând $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$ se construiesc cercurile C_{13} , C_{12} , C_{23} cu diametrele $\sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$ (figura 36).

În baza ipotezei tensiunii tangențiale maxime starea limită este definită de tensiunea tangențială maximă: $\tau_{max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ și este independentă de valoarea tensiunii principale σ_2 . Prin urmare în definirea stării limită interesează numai cercul de diametru maxim $\sigma_1 - \sigma_3$ cu centru C_{13} denumit *cerc determinant*. Tensiunea tangențială maximă este ordonată punctului M . Se spune că M este punctul caracteristic al stării limită.

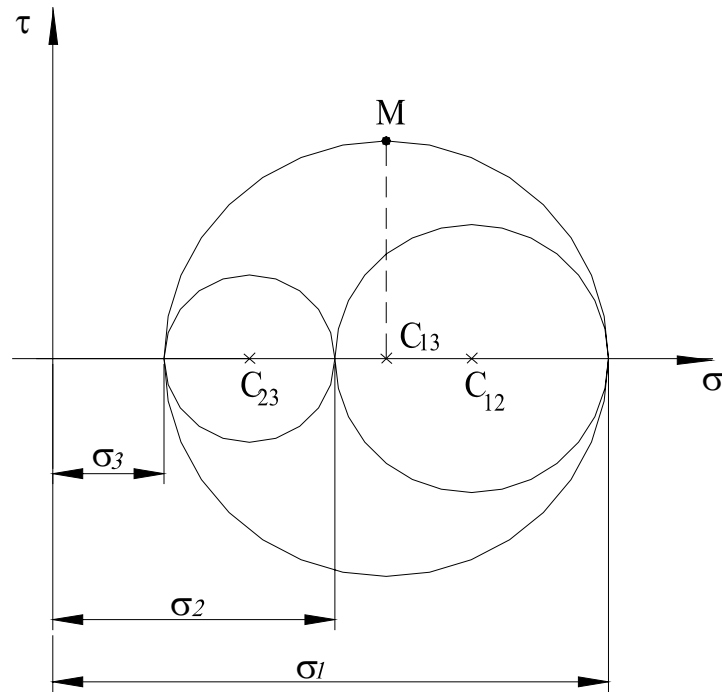


Figura 36

În cazul materialelor tenace drept stare limită se consideră atingerea limitei de curgere σ_c . Pentru determinarea stării limită pentru un material se încarcă o serie de epruvete din materialul respectiv cu diferite feluri de solicitări, în urma cărora se obțin σ_{1L} și σ_{3L} (în cazul considerat σ_{1c} și σ_{3c}). Valorile astfel obținute se reprezintă în sistemul de axe rectangulare $\sigma O \tau$ prin cercurile lui Mohr cu centre pe axa $O\sigma$ (figura 37).

În figură se reprezintă starea de tensiuni la un material care are rezistența de rupere la întindere diferită de cea de la compresiune ($\sigma_{cc} \neq \sigma_{ct}$), deci cercurile C_1 și respectiv C_2 care reprezintă întinderea și compresiunea simplă și care au diametre diferite. Înfășurătoarea acestor cercuri reprezintă starea limită pentru materialul respectiv și pentru un material dat este unică.

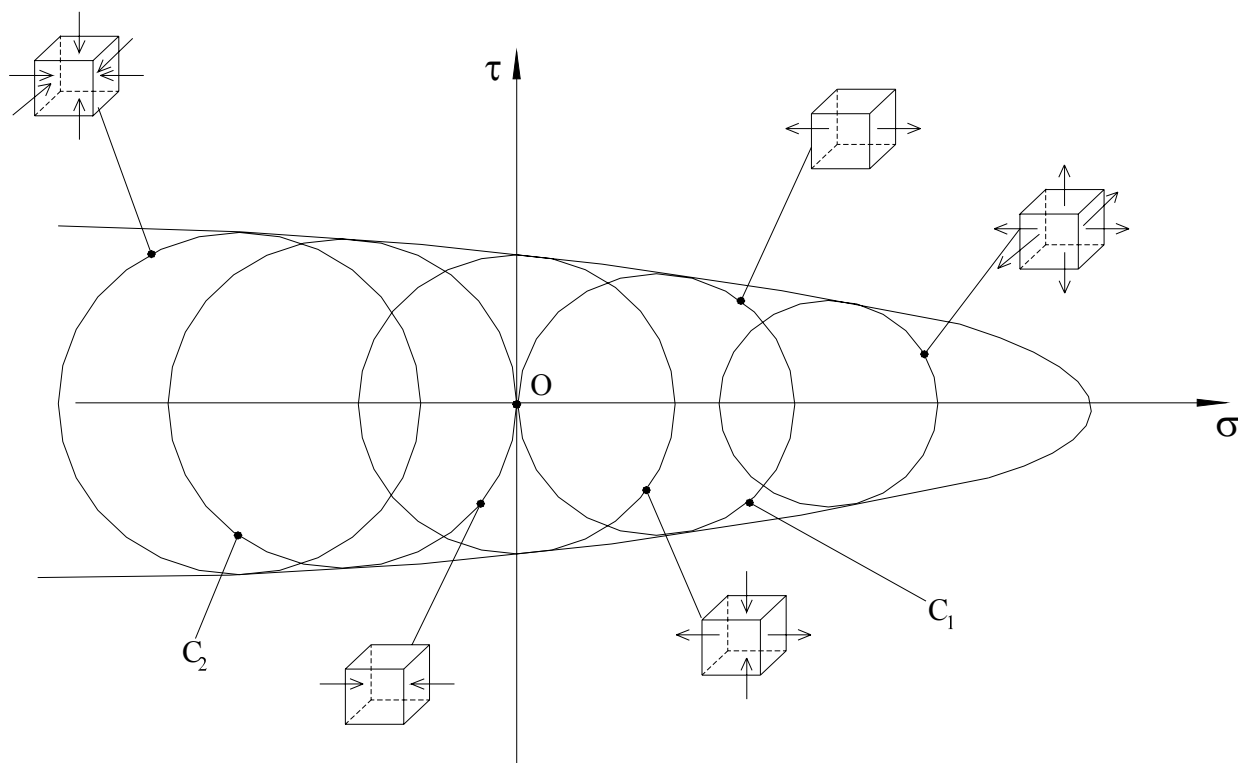


Figura 37

Dacă se cunoaște înfășurătoarea pentru studiul rezistenței se procedează astfel: pentru starea de tensiuni dată se determină σ_1 și σ_3 și se construiește *cercul lui Mohr*. Dacă acest cerc este în interiorul înfășurătoarei, starea de tensiuni studiată se găsește în zona de rezistență a materialului. Dacă cercul lui Mohr atinge curba înfășurătoare materialul trebuie să cedeze.

Prin urmare pericolul pe care îl prezintă o anumită stare de tensiuni este caracterizat prin mărimea și poziția cercului determinant față de înfășurătoarea limită de pe diagrama cercului. Prin urmare două stări de tensiune sunt la fel de periculoase dacă cercurile determinante corespunzătoare sunt tangente la aceeași înfășurătoare.

Când materialul rezistă la fel la întindere ca și la compresiune (materiale tenace) cercurile C_1 și C_2 au diametre egale și înfășurătoarea este reprezentată în acest caz prin două drepte tangente la aceste cercuri pe porțiunea dintre ele (*figura 38*).

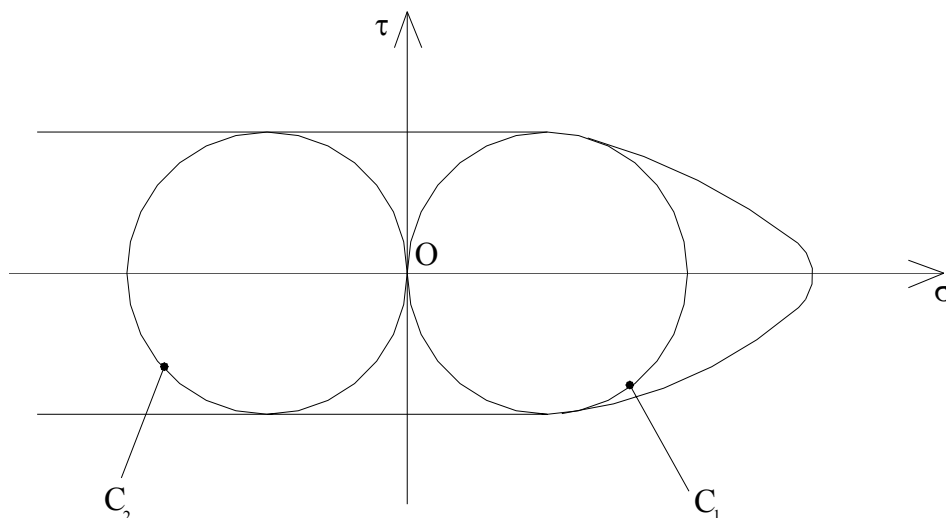


Figura 38.

Dacă pentru curba înfășurătoare ce reprezintă starea limită coeficientul de siguranță este $c=1$ atunci pentru curbele înfășurătoare corespunzătoare stărilor sub starea limită coeficientul de siguranță $c>1$, iar în afară $c<1$ (figura 39).

Coeficientul de siguranță este determinat în momentul în care se stabilește care dintre înfășurători este tangentă la cercul ce determină starea de tensiune studiată. Prin urmare, stabilirea coeficientului de siguranță pe baza acestei teorii este corectă, dar în același timp este foarte laborioasă deoarece pentru fiecare material trebuie construite astfel de înfășurători limită pe bază de date experimentale rezultate din încărcări.

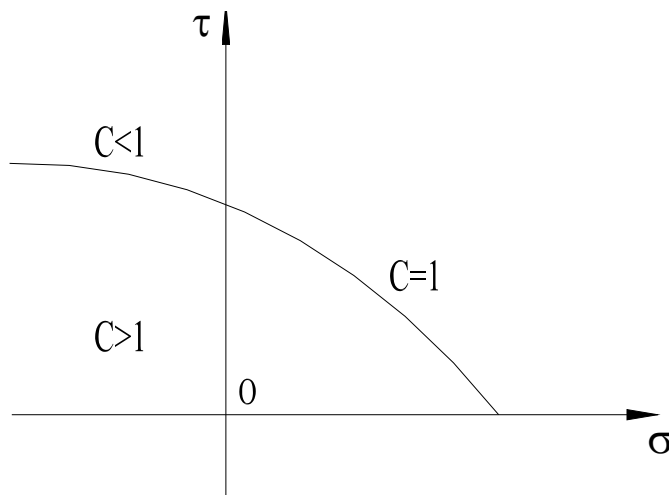


Figura 39.

Din această cauză, se consideră în mod simplificat că se înlocuiește curba stării limită cu dreapta MLN tangentă la cercurile lui Mohr, care reprezintă întinderea simplă și compresiunea simplă (figura 40). În acest caz înfășurătoarea se construiește numai pe baza a două încercări, una de întindere și alta de compresiune.

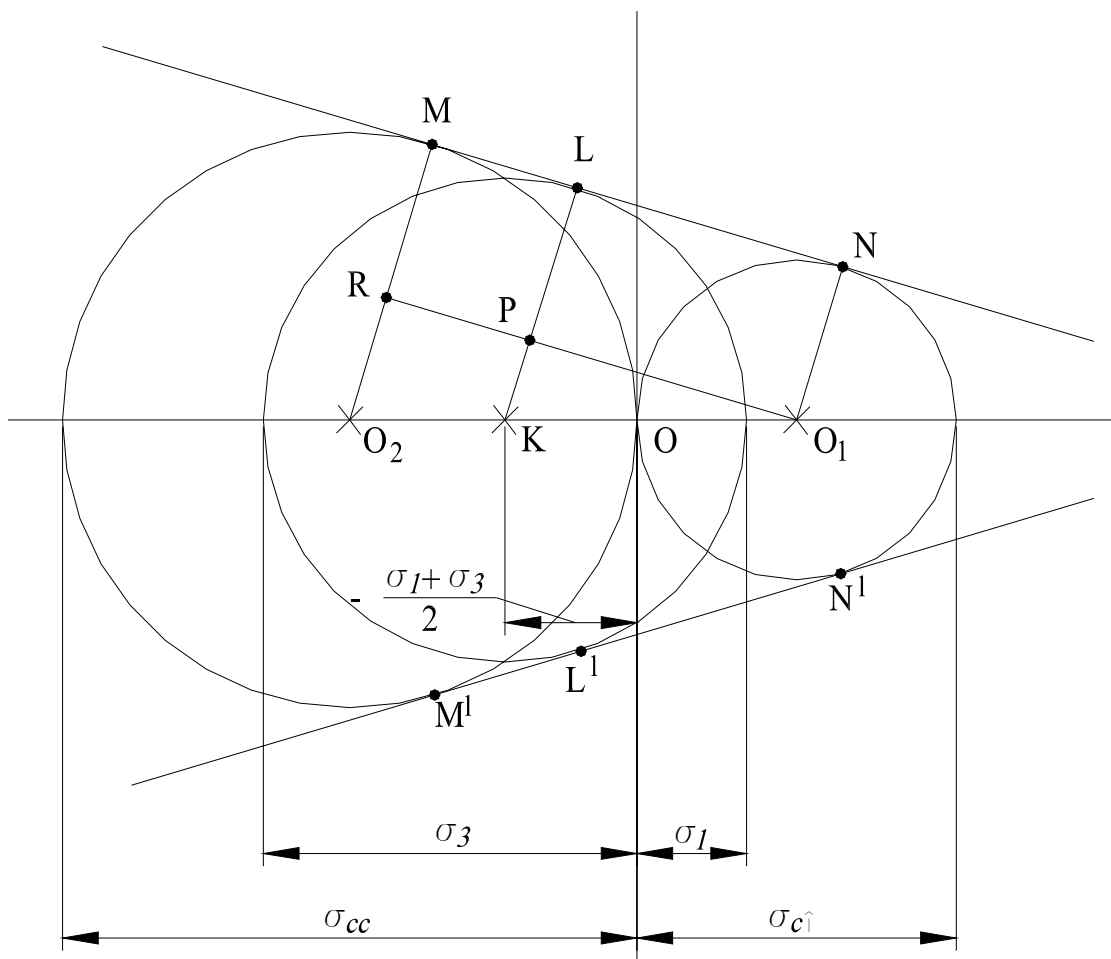


Figura 40

Cu notațiile din figură se poate scrie:

$$O_1K = O_1O + OK = \frac{\sigma_{ci}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_1 = \frac{\sigma_{ci}}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_{ci}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Pentru o stare de solicitare oarecare definită prin tensiunile principale σ_1 și σ_3 se construiește cercul cu centrul în K având raza $KL = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Se poate stabili o relație între tensiunile principale σ_1 , σ_3 și limitele de curgere σ_{ci} , σ_{cc} dată de condiția tangentei comune la cele trei cercuri.

Considerând triunghiurile asemenea O_1PK și O_1RO_2 și scriind proporționalitatea dintre laturi se obține:

$$\frac{O_1K}{O_1O_2} = \frac{KP}{O_2R}$$

sau

$$\frac{\frac{\sigma_{ci}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_{ci}}{2} + \frac{\sigma_{cc}}{2}} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{ci}}{2}}{\frac{\sigma_{cc}}{2} - \frac{\sigma_{ci}}{2}}$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$\sigma_{ci} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{cc}} \cdot \sigma_3 \quad (149)$$

În relația (149) σ_{ci} reprezintă starea limită pentru încercarea de întindere simplă, luată egală cu limita de curgere. Prin urmare membrul din stânga al relației este tensiunea echivalentă stării limită. Relația (149) devine:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{cc}} \cdot \sigma_3$$

sau notând $k = \frac{\sigma_{ci}}{\sigma_{cc}}$ se obține:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - k \cdot \sigma_3 \quad (150)$$

Relația lui Mohr (150) exprimă tensiunea echivalentă funcție de tensiunile principale σ_1 , σ_3 și raportul k dintre tensiunile admisibile la întindere-

compresiune pentru cazul materialelor cu comportare diferita la intindere si compresiune.

Particularizand aceasta teorie se obtine pentru diferite cazuri particulare:

- pentru cazul materialelor tenace $k=1$ (materiale avand aceeași comportare la intindere si compresiune) *relația (150)* devine:

$$\sigma_{echiv} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (151)$$

Ultima relație este similară cu *relația (135)* care reprezintă criteriul de rezistență rezultat din ipoteza tensiunii tangențiale maxime. În acest caz linia stării limită devine paralelă cu axa $O\sigma$ ca în *figura 41*.

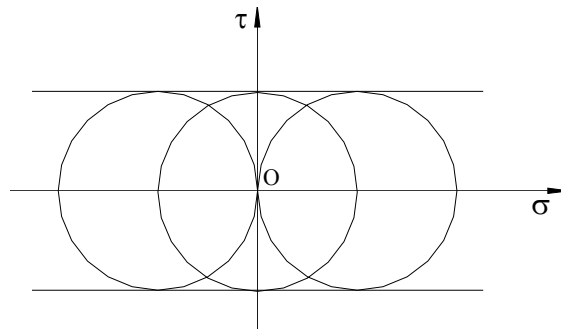


Figura 41.

- pentru cazul forfecării ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$) relația de calcul a tensiunii echivalente devine:

$$\sigma_{echiv} = \tau + k\tau \quad (152)$$

sau

$$\tau_{echiv} = \frac{\sigma_{ech}}{1+k} \quad (153)$$

- pentru starea plana de tensiuni relatia de calcul a tensiunii echivalente devine:

$$\sigma_{echiv} = \left| \sigma_1 - k\sigma_3 \right| \leq \sigma_a \quad (154)$$

Dacă $\left| \sigma_1 \right| \geq \left| \sigma_3 \right|$ *relatia (154)* este o generalizare a teoriilor clasice:

- pentru $k=0$ se obtine *ipoteza tensiunii normale maxime*;

- pentru $k=1$ se obține ipoteza tensiunii tangențiale maxime;
- pentru $k=\nu=0,3$ se obține ipoteza deformației specifice liniare maxime.

Teoria stării limită a lui Mohr nu necesită o verificare experimentală suplimentară deoarece se bazează în întregime pe date experimentale. Aceasta se aplică în special la materialele fragile când solicitarea dominantă este compresiunea.

De reținut:

Experiențele au arătat că nici una din teoriile de rezistență nu s-a impus ca o teorie general valabilă. Totuși în majoritatea stărilor de tensiune teoria lui Mohr, teoriile tensiunii tangențiale maxime și a energiei de deformație modificatoare de formă dau rezultatele cele mai apropiate de cele obținute experimental.

Pentru materialele tenace (oțel) se recomandă utilizarea teoriei tensiunii tangențiale maxime:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

și a teoriei energiei de deformație modificatoare de formă:

$$\sigma_{echiv} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_a$$

Pentru materialele fragile se recomandă utilizarea ipotezei deformației specifice liniare maxime:

$$\sigma_{echiv} = 0,35\sigma + 0,65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_a$$

Bibliografie

1. Anghel A., - *Rezistența materialelor, partea 1-a*, Ed. Tehnică, București, 2001
2. Atanasiu, M. - *Metode analitice noi în Rezistența materialelor*, Ed. U.P.B. 1994
3. Babeu T., - *Rezistența materialelor*, vol.1, Universitatea Tehnică Timișoara, 1991
4. Buga, M., Iliescu, N., Atanasiu, C., Tudose, I. - *Probleme alese de Rezistența materialelor*, Ed. U.P.B. 1985
5. Baușic V. (coord.), - *Rezistența materialelor*, Inst. Politehnic-Iași, 1978
6. Bârsănescu P. D., - *Rezistența materialelor*, vol.1, Solicități simple, Ed. Gh.Asachi, Iași, 2001
7. Bia C., Ille V., Soare M.V., - *Rezistența mat. și Teoria elasticității*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1967
8. Buzdugan, Gh. - *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei, București 1986
9. Buzdugan, Gh. s.a. - *Culegere de probleme din Rezistența Materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1979.
10. Constantinescu, I., Dăneț, G.V. - *Metode noi pentru calcule de rezistență*, Ed.Tehnică, București 1989
11. Constantinescu, I.N., Piciu, R.C., Hadar,A., Gheorghiu, H. - *Rezistența materialelor pentru inginerie mecanică*, Ed. BREN, București 2006
12. Crețu, A. - *Probleme alese din Rezistența materialelor*, Ed. Mediamira, Cluj- Napoca 2001.
13. Crețu, A. - *Tensiuni, Stress, Contraintes*, Ed. UT Cluj-Napoca 1993

14. Curtu I., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Univ. Brașov, 1988
15. Curtu I., Ciofoaia M., Baba M., Cerbu C., Repanovici A., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Probleme IV, Ed. Infomarket, Brașov, 2005
16. Deutsch I., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979
17. Deutsch I., Goia I., Curtu I., Neamțu T., Sperchez Fl., - *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
18. Deutsch, I. s.a. - *Probleme din rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1986
19. Drobotă, V. - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1982
20. Dumitru I., Faur N., - *Elemente de calcul și aplicații în rezistența materialelor*, Ed. Politehnică, Timișoara, 1999
21. Dumitru I., Neguț N., - *Elemente de Elasticitate, Plasticitate și Rezistența Materialelor*, vol. I, Ed. Politehnică, Timișoara, 2003
22. Gheorghiu, H., Hadar, A., Constantin, N. - *Analiza structurilor din materiale izotrope și anizotrope*, Editura Printech, București 1998
23. Goia I., - *Rezistența materialelor*, vol. 1, ediția a 3-a, Editura Transilvania, Brașov, 2000
24. Horbaniuc D., - *Rezistența materialelor*, vol. 1, Inst. Politehnic-Iași, 1979
25. Horbaniuc D. (coord.), - *Rezistența mat. Elasticitate. Probleme*, Ed. „Gh. Asachi”, Iași, 1993
26. Ispas, B., Constantinescu E., Alexandrescu, I. - *Rezistența materialelor. Culegere de probleme*, Ed Tehnică, București 1997.
27. Iliescu, N., Jiga, G., Hadar A. - *Teste grilă de Rezistența materialelor*. Ed. PRINTECH, București 2000
28. Marin, C - *Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității*, Editura BIBLIOTHECA, Târgoviște 2006.

29. Mocanu D.R., - *Inercarea materialelor*, vol. 1-3, Ed. Tehnică, București, 1982
30. Mocanu D.R., - *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București, 1980
31. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, Ed. CERMI, Iași, 1998
32. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, vol1, Ed. TEHNOPRESS, Iași, 2006
33. Ponomariov S.D. ș.a., - *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1964
34. Ponomariov S.D. ș.a., - *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, Ed. Tehnică, București, 1967
35. Posea, N. s.a. - *Rezistența materialelor. Probleme*, Ed. Științifică și Enciclopedică București 1986
36. Radu, Gh., Munteanu, M - *Rezistența materielelor și elemente de Teoria Elasticității*, Vol. 2. Ed. MACARIE, Târgoviște 1994
37. Timoshenko, S.P. - *Teoria stabilității elastice*. Ed. Tehnică, București 1967
38. Tripa M., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1967
39. Tudose I, Constantinescu D.M., Stoica, M. - *Rezistența materialelor. Aplicații*, Ed. Tehnică, București 1990
40. Voinea R., Voiculescu D., Simion P.F., - *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Ed. Academiei, București, 1989