

MOCANU FLORENTINA

REZISTENȚA , MATERIALELOR

PARTEA I

Noțiuni recapitulative

Noțiuni fundamentale

Încercarea materialelor. Ipoteze simplificatoare. Metode de calcul în Rezistența materialelor

Teoreme și metode energetice

Solicitări axiale

Calculul convențional al barelor la forfecare

Calculul barelor de secțiune circulară la torsiune

Solicitarea de încovoiere

Cuprins

CAPITOLUL 1. NOȚIUNI RECAPITULATIVE

1.1. Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane.....	5
1.1.1. Aria.....	5
1.1.2. Momentul static.....	6
1.1.3. Momente de inerție.....	8
1.1.4. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele.....	10
1.1.5. Variația momentelor de inerție la rotirea sistemului de referință.....	11
Momente de inerție principale.....	
1.1.6. Module de rezistență.....	14
1.1.7. Raze de inerție. Elipsa de inerție.....	15
1.1.8. Calculul caracteristicilor geometrice.....	15
1.2. Elemente de statică.....	25
1.2.1. Forțe și momente.....	25
1.2.1. Ecuațiile staticii.....	28

CAPITOLUL 2. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

2.1. Obiectul disciplinei.....	30
2.2. Clasificarea corpurilor solide.....	31
2.3. Clasificarea sarcinilor.....	32
2.4. Forțe și momente exterioare.....	35
2.5. Forțe și momente interioare.....	40
2.6. Relații diferențiale între sarcini și eforturi.....	44
2.7. Tensiuni.....	45
2.8. Ecuații de echivalență (relații între eforturi și tensiuni).....	47
2.9. Solicitări simple.....	48
2.10. Deplasări și deformații.....	49

CAPITOLUL 3. ÎNCERCAREA MATERIALELOR. IPOTEZE SIMPLIFICATOARE. METODE DE CALCUL ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

3.1. Încercarea materialelor.....	55
3.1.1. Considerații generale.....	55
3.1.2. Tipuri de epruvete.....	56
3.1.3. Încercarea la tracțiune.....	58
3.1.4. Solicitarea la compresiune.....	69
3.1.5. Solicitarea la forfecare.....	71
3.1.6. Solicitarea la torsiune.....	72
3.1.7. Încercarea la încovoiere simplă.....	75

3.1.8 Încercări tehnologice.....	75
3.1.8.1 Determinarea durității.....	75
3.1.8.2 Determinarea rezilienței.....	77
3.1.9. Factori care influențează caracteristicile mecanice și elastice ale materialelor.....	78
3.2. Ipoteze simplificatoare în Rezistența Materialelor.....	84
3.3. Metode de calcul în Rezistența Materialelor.....	88

CAPITOLUL 4. TEOREME ȘI METODE ENERGETICE

4.1. Considerații generale.....	96
4.2. Teoremele lui Clapeyron. Lucrul mecanic exterior.....	97
4.3. Energia potențială de deformare.....	100
4.4. Principiul independenței acțiunii forțelor și a suprapunerii efectelor (principiul Boltzmann).....	102
4.5. Teorema reciprocității lucrului mecanic virtual (teorema Betti).....	104
4.6. Teorema reciprocității deplasărilor (teorema lui Maxwell).....	105
4.7. Teoremele lui Castigliano.....	106
4.8. Teorema energiei potențiale minime (Menabrea).....	108
4.9. Metoda Maxwell-Mohr pentru determinarea derivatelor eforturilor.....	110
4.10. Metoda Mohr-Vereșceaghin.....	112
4.11. Metoda eforturilor.....	114

CAPITOLUL 5. SOLICITĂRI AXIALE

5.1. Considerații generale.....	117
5.2. Tensiuni și deformări.....	118
5.3. Energia potențială de deformare.....	122
5.4. Bare de lungime mare în câmp gravitațional.....	127
5.5. Bare de secțiune variabilă (bara de egală rezistență).....	132
5.6. Probleme static nedeterminate.....	137

CAPITOLUL 6. CALCULUL CONVENȚIONAL AL BARELOR LA FORFECARE

6.1. Introducere.....	159
6.2. Calculul tensiunii tangențiale.....	160
6.3. Energia potențială de deformare.....	163
6.4. Calculul convențional al îmbinărilor.....	164
6.4.1. Îmbinări cu șuruburi sau nituri.....	164
6.4.2. Calculul convențional al îmbinărilor sudate.....	169

6.4.3. Calculul convențional al îmbinărilor cu adezivi.....	172
---	-----

CAPITOLUL 7. TORSIUNEA BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

7.1. Considerații generale.....	175
7.2. Deformarea barelor solicate la torsiune.....	176
7.3. Calculul tensiunii tangențiale.....	180
7.4. Secțiunea rațională.....	181
7.5. Calculul momentului de torsiune cunoscând puterea și turația.....	182
7.6. Energia potențială de deformare.....	183
7.7. Probleme static nedeterminate.....	190

CAPITOLUL 8. SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE

8.1. Considerații generale.....	195
8.2. Studiul deformării grinzilor.....	196
8.3. Calculul tensiunilor normale. Formula lui Navier.....	197
8.4. Calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă. Formula lui Juravski.....	204
8.5. Energia potențială de deformare.....	213
8.6. Trasarea diagramelor de eforturi.....	215
8.7. Considerații privind calculul grinzilor solicate la încovoiere simplă.....	228
8.8. Fenomenul de lunecare longitudinală.....	230
8.9. Grinzi de egală rezistență.....	233
8.10. Calculul deplasărilor la încovoiere.....	235
8.10.1. Generalități.....	235
8.10.2. Ecuația diferențială a axei neutre deformate (Euler).....	237
8.10.3. Metode de calcul a deformațiilor la încovoiere.....	238
8.11. Grinzi static nedeterminate.....	257
 Bibliografie.....	 267

CAPITOLUL 1

NOȚIUNI RECAPITULATIVE

1.1. Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane

În acest capitol se prezintă o recapitulare minimală caracteristicilor geometrice ale suprafețelor plane, absolut necesară abordării disciplinei de Rezistența materialelor. Pentru o suprafață plană, care poate fi cea a secțiunii transversale a unei bare, se va lucra în sistemul de referință **zOy**, axa **Ox** fiind aleasă pe direcția axei barei. În categoria caracteristicilor geometrice ale suprafețelor plane se încadrează: aria, momentele statice, momentele de inerție, modulele de rezistență, razele de inerție.

1.1.1. Aria

Cea mai simplă caracteristică geometrică a secțiunii transversale, ***aria secțiunii***, are ca unitatea de măsură [mm^2] și se calculează cu integrala:

$$A = \int_A dA \quad (1.1)$$

S-a considerat secțiunea compusă dintr-o infinitate de arii elementare dA , integrala semnificând extinderea calculului pe toată secțiunea.

1.1.2. Momentul static

Se consideră o figură plană de formă oarecare, de arie A , raportată la un sistem de axe rectangulare zOy (figura 1.1). Momentele statice ale suprafeței față de axele Oz , respectiv Oy se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA \\ S_y &= \int_A z dA \end{aligned} \quad (1.2)$$

Momentul static se măsoară în $[mm^3]$.

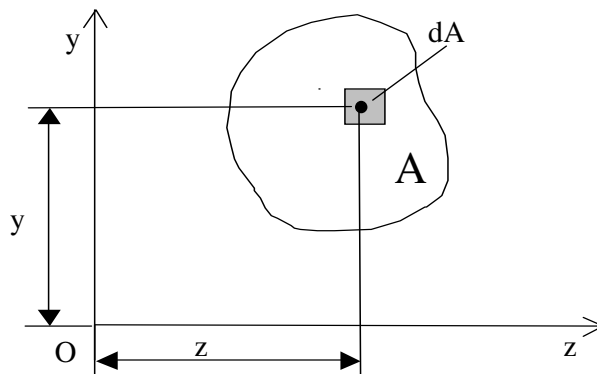


Figura 1.1

Momentele statice se utilizează pentru determinarea poziției centrului de greutate G al ariei secțiunii transversale. Dacă se notează cu z_G și y_G coordonatele centrului de greutate G al unei figuri (figura 1.2) se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} S_z &= Ay_G \\ S_y &= Az_G \end{aligned} \quad (1.3)$$

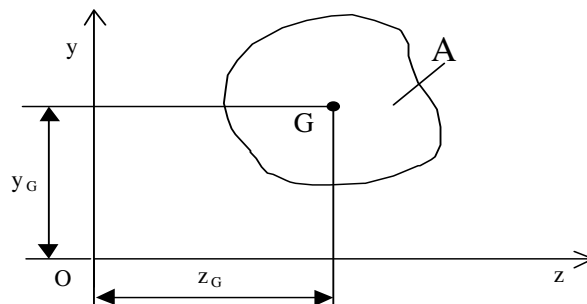


Figura 1.2

Din *relațiile (1.3)* se observă că momentul static al secțiunii față de o axă care trece prin centrul de greutate al secțiunii este nul. Sistemul de axe care are originea în centrul de greutate al secțiunii transversale se numește **sistem de axe central**, iar axele sunt **axe centrale**.

Din *relațiile (1.3)* rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{S_y}{A} \\ y_G &= \frac{S_z}{A} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dacă o suprafață oarecare este compusă aceasta se divide în figuri simple, pentru care se cunosc aria și poziția centrului de greutate, iar momentele statice ale întregii figuri se determină prin sumarea algebrică a momentelor statice ale figurilor componente. Prin urmare:

$$\begin{aligned} S_z &= \sum_{i=1}^n A_i y_{Gi} \\ S_y &= \sum_{i=1}^n A_i z_{Gi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pentru o suprafață oarecare, care poate fi descompusă în figuri simple, coordonatele centrului de greutate se calculează cu relațiile:

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{Gi}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}}{A}$$
(1.6)

în care: $A = \sum_{i=1}^n A_i$ este aria întregii figuri;

A_i - aria figurii i ;

z_{Gi} , y_{Gi} - coordonatele centrului de greutate al figurii i .

Observații

- 1) Orice axă de simetrie conține centrul de greutate al figurii.
- 2) La intersecția a două axe de simetrie se găsește centrul de greutate.
- 3) Ariile și momentele statice ale unor goluri sunt considerate negative.

1.1.3. Momente de inerție

Pentru suprafața plană din figura 1.3 se pot defini: momente de inerție axiale, moment de inerție centrifugal, moment de inerție polar.

1.1.3.1. Momente de inerție axiale

Momentele de inerție axiale ale unei figuri, față de axele **Oz** și respectiv **Oy**, sunt date de relațiile:

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$
(1.7)

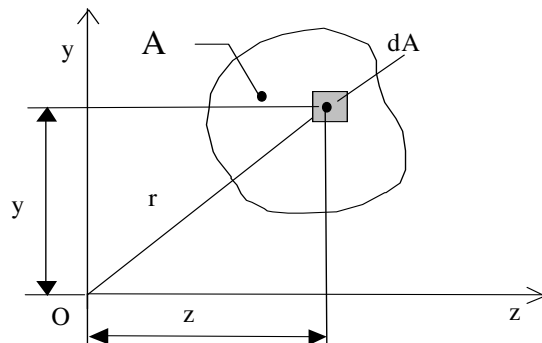


Figura 1.3

1.1.3.2. Moment de inerție centrifugal

Momentul de inerție centrifugal se determină cu relația:

$$I_{zy} = \int_A zy dA \quad (1.8)$$

Axele în raport cu care $I_{zy} = 0$ se numesc **axe principale de inerție**. Față de aceste axe, momentele de inerție axiale I_z și I_y au valori **maxime**, respectiv **minime**. Axele principale care trec prin centrul de greutate al figurii se numesc **axe principale centrale**.

1.1.3.3. Moment de inerție polar

Momentul de inerție polar se determină cu relația:

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad (1.9)$$

Dacă se aplică teorema lui Pitagora pentru unul din triunghiurile formate în figura 1.3 rezultă $r^2 = z^2 + y^2$ și înlocuind în relația 1.9 se obține:

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA$$

respectiv

$$I_p = I_z + I_y \quad (1.10)$$

Observații:

1) *Momentele de inerție axiale și polare sunt întotdeauna pozitive.*

- 2) *Momentul de inerție centrifugal poate fi pozitiv, nul sau negativ.*
- 3) *Unitatea de măsură pentru toate momentele de inerție este $[mm^4]$.*
- 4) *Momentele de inerție ale golurilor se consideră negative.*
- 5) *Axele de simetrie sunt și axe principale.*
- 6) *Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale față de două axe perpendiculare oarecare care trec prin polul considerat.*

1.1.4. Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele

Se consideră o suprafață plană de arie A raportată la un sistem de referință central, față de care momentele de inerție ale suprafeței sunt I_z , I_y și I_{zy} . Să se determine momentele de inerție ale suprafeței față de un alt sistem de referință, având axe paralele cu primul (figura 1.4).

Pe baza figurii se poate scrie:

$$\begin{aligned} y_1 &= y + y_0 \\ z_1 &= z + z_0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

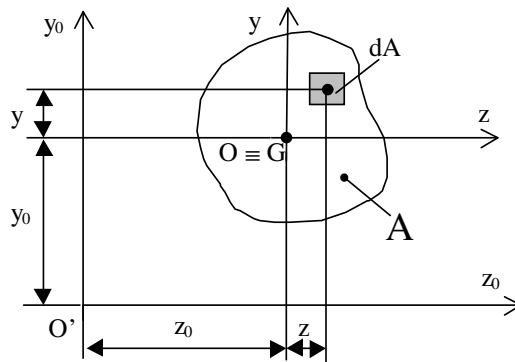


Figura 1.4

Utilizând formulele generale pentru momente de inerție, după efectuarea tuturor calculelor, se obține:

$$\begin{aligned}
I_{z_o} &= I_z + y_o^2 A \\
I_{y_o} &= I_y + z_o^2 A \\
I_{z_o y_o} &= I_{zy} + z_o y_o A
\end{aligned}
\tag{1.12}$$

unde: coordonatele z_o și y_o sunt luate cu semnul lor și reprezintă coordonatele originii sistemului vechi în noul sistem de coordonate.

*Relațiile (1.12) se numesc **relațiile lui Steiner** și se enunță astfel: momentul de inerție axial față de o axă paralelă cu o axa centrală este egal cu momentul de inerție față de axa centrală plus produsul dintre aria secțiunii și pătratul distanței dintre cele două axe, iar momentul de inerție centrifugal este egal cu momentul de inerție centrifugal față de axa centrală plus produsul distanțelor (dintre cele două axe) cu aria.*

Relațiile (1.12) se folosesc frecvent pentru calculul momentelor de inerție ale figurilor compuse. Adunând primele două relații (1.12) se obține pentru momentul de inerție polar următoarea expresie:

$$I_{po} = I_p + (z_o^2 + y_o^2)A \tag{1.13}$$

Dacă se cunosc momentele de inerție în raport cu niște axe oarecare, atunci pentru axele care trec prin centrul de greutate al figurii, paralele cu axele date din relațiile (1.12) rezultă:

$$\begin{aligned}
I_z &= I_{z_o} - y_o^2 A \\
I_y &= I_{y_o} - z_o^2 A \\
I_{zy} &= I_{z_o y_o} - z_o y_o A
\end{aligned}
\tag{1.14}$$

Din ultimele relații se observă că momentele de inerție în raport cu axele centrale au cea mai mică valoare în comparație cu momentele de inerție pentru oricare alte axe paralele cu primele.

1.1.5. Variația momentelor de inerție la rotirea sistemului de referință. Momente de inerție principale

Dacă pentru o suprafață plană oarecare, de arie A se cunosc momentele de inerție I_z , I_y și I_{zy} , față de un sistem de axe rectangulare zOy cu originea în centrul de greutate (*figura 1.5*), se pune problema de a determina momentele de inerție față de un sistem de referință rotit cu unghiul α față de primul.

Coordonatele unui element de arie dA în noul sistem de axe, se exprimă în funcție de coordonatele din vechiul sistem cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned} z_0 &= y \sin \alpha + z \cos \alpha \\ y_0 &= y \sin \alpha - z \sin \alpha \end{aligned} \quad (1.15)$$

Se înlocuiesc aceste expresii în relațiile de definiție pentru momentele de inerție axiale și momentul de inerție centrifugal.

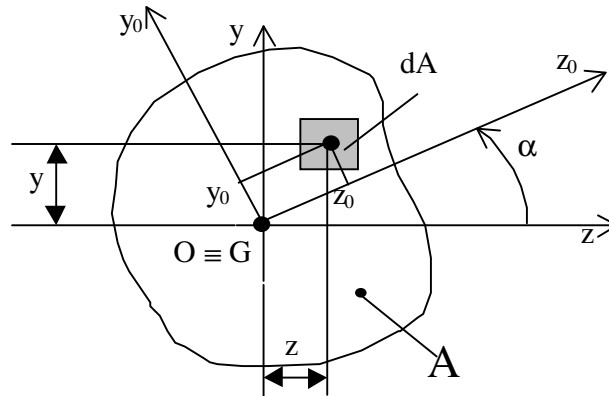


Figura 1.5

După efectuarea tuturor calculelor rezultă următoarele expresii cu ajutorul cărora se determină momentele de inerție față de sistemul de axe rotit:

$$\begin{aligned}
I_{zo} &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{zy} \sin 2\alpha \\
I_{yo} &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{zy} \sin 2\alpha \\
I_{zoyo} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dacă se adună primele două relații (1.16) rezultă:

$$I_{zo} + I_{yo} = I_z + I_y = I_p = \text{constant} \tag{1.17}$$

Rezultă că suma momentelor de inerție axiale în raport cu orice pereche de axe ortogonale care trec printr-un pol dat este constantă și egală cu momentul de inerție polar indiferent de poziția pe care aceste axe o ocupă prin rotirea în jurul originii.

Din *relațiile (1.16)* se observă că momentele de inerție I_z și I_y variază cu unghiul α . Valorile extreme (maxime și minime) ale momentelor, numite *momente de inerție principale* se notează cu I_1 și I_2 și se determină cu relația:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_z - I_y)^2}{4} + I_{zy}^2} \tag{1.18}$$

Pentru $I_1 = I_{\max}$ se consideră semnul (+), iar pentru $I_2 = I_{\min}$ semnul (-).

Axele față de care momentele de inerție axiale au valori extreme se numesc *axe principale de inerție* și se notează cu **1** și **2**. Direcțiile principale (direcțiile axelor principale) sunt date de ecuația:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} \tag{1.19}$$

Valorile extreme ale momentului de inerție centrifugal I_{zy} corespund unui sistem de axe care fac un unghi de 45° față de axele principale și se calculează cu relația:

$$I_{zy1,2} = \pm \frac{I_1 - I_2}{2} \tag{1.20}$$

Observații

- 1) Axele de simetrie ale unei figuri sunt axe principale de inerție.
- 2) Momentul de inerție centrifugal I_{zy} este nul în raport cu axele principale de inerție.
- 3) Pentru $I_{zy} < 0$ axa principală 1 (față de care momentul de inerție este maxim) trece prin primul cadran, iar pentru $I_{zy} > 0$ prin cadranul al doilea.
- 4) Direcțiile principale sunt ortogonale.
- 5) Din punct de vedere practic un interes deosebit prezintă **momentele de inerție centrale principale** (momente calculate în raport cu axele principale care trec prin centrul de greutate al secțiunii).
- 6) Pentru secțiunile cu o singură axă de simetrie aceasta este axă principală, iar a doua este perpendiculara pe aceasta prin centru de greutate.

1.1.6. Module de rezistență

1.1.6.1. Module de rezistență axiale

Modulele de rezistență axiale W_z și W_y sunt definite de relațiile:

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{I_z}{y_{\max}} \\ W_y &= \frac{I_y}{z_{\max}} \end{aligned} \quad (1.21)$$

unde: $y_{\max}$ = distanța de la axa Oz la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii;

$z_{\max}$ = distanța de la axa Oy la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii.

1.1.6.2. Modul de rezistență polar

Se definește modulul de rezistență polar ca raportul dintre momentul de inerție polar și distanța de la pol până la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii:

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} \quad (1.22)$$

Modulele de rezistență se măsoară în $[\text{mm}^3]$.

1.1.7. Raze de inerție. Elipsa de inerție

Razele de inerție sau de rotație ale unei figuri, în raport cu un sistem de axe zOy sunt date de expresiile:

$$\begin{aligned} i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} \\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Unitatea de măsură pentru razele de inerție este cea de lungime [mm].

Pentru axele de inerție principale centrale razele de inerție principale sunt:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{\frac{I_1}{A}} \\ i_2 &= \sqrt{\frac{I_2}{A}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Aceste raze de rotație sunt semiaxele elipsei principale centrale de inerție a figuri a cărei ecuație este:

$$\frac{z^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_2^2} = 1 \quad (1.25)$$

1.1.8. Calculul caracteristicilor geometrice

1.1.8.1. Caracteristicilor geometrice pentru suprafețe simple

Pentru suprafețele simple expresiile momentelor de inerție se determină prin integrarea directă a formulelor de definiție.

Aplicații

Ne propunem, de exemplu, să determinăm momentul de inerție pentru un triunghi oarecare (*figura 1.6*) de lățime b și înălțime h , în raport cu axa Oz care trece prin baza triunghiului. Se consideră o suprafață elementară de arie dA de forma unei fâșii paralele cu axa Oz , de lățime $b(y)$ și înălțime dy . Din asemănarea triunghiurilor se poate scrie $b(y)$ și respectiv expresia elementului de arie:

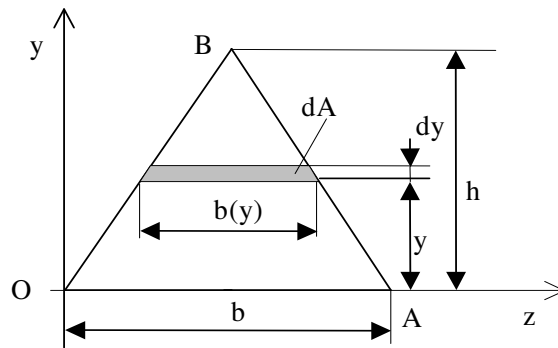


Figura 1.6.

$$b(y) = \frac{b}{h}(h - y)$$

$$dA = b(y)dy = \frac{b}{h}(h - y) dy \quad (1.26)$$

Prin urmare:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{bh^3}{12} \quad (1.27)$$

Pentru câteva secțiuni simple caracteristicile geometrice au următoarele expresii:

- pentru dreptunghiul de înălțime **h** și bază **b**:

$$A=bh; \quad I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad W_z = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{hb^2}{6} \quad (1.28)$$

- pentru pătratul de latură **a** (**b=h**):

$$A=a^2; \quad I_z = I_y = \frac{a^3}{12}; \quad W_z = w_y = \frac{a^2}{6} \quad (1.29)$$

- pentru cercul de diametru **d**, ca și pentru pătrat, toate axele centrale ale secțiunii sunt principale și toate momentele de inerție centrale principale sunt egale. Similar și pentru hexagon, etc. În cazul secțiunii circulare caracteristicile geometrice sunt date de relațiile:

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad (1.30)$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

- pentru un triunghi oarecare de lățime **b** și înălțime **h**, în raport cu sistemul de axe central:

$$A = \frac{bh}{2}; \quad I_z = \frac{bh^3}{36}; \quad W_z = \frac{bh^2}{24} \quad (1.31)$$

- pentru un poligon regulat cu **n** laturi de lungime **a**:

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{12\alpha} \sin \alpha (\cos \alpha + 2); \quad I_p = \frac{\pi R^4}{6\alpha} \sin \alpha (\cos \alpha + 2) \quad (1.32)$$

$$\text{unde: } \alpha = \frac{2\pi}{n};$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

În afară de secțiunile simple, ale căror caracteristicile geometrice sunt calculate, în practica inginerescă se folosesc profile standardizate (profil I, U, T cornier cu aripi egale și neegale) ale căror caracteristici geometrice se găsesc tabelate.

1.1.8.2. Caracteristicilor geometrice pentru suprafețe compuse

Pentru determinarea poziției axelor centrale principale și a momentelor de inerție principale centrale ale unei secțiuni compuse, care poate fi descompusă în figuri simple, se vor parcurge următoarele etape:

- 1) Se descompune secțiunea compusă în figuri simple.
- 2) Se alege unui sistem de referință arbitrar.
- 3) Se determină poziția centrului de greutate al secțiunii, cu relația (1.6).
- 4) Se determină, utilizând relațiile (1.12), momentele de inerție axiale I_z , I_y și cel centrifugal I_{zy} față de sistemul de axe central (un sistem de axe cu originea

în centrul de greutate al secțiunii și cu axele paralele cu cele ale sistemului inițial).

5) Se determină, cu relația (1.19) unghiul de rotire al axelor principale.

6) Cu relația (1.18) se determină momentele de inerție principale.

7) Cu relațiile (1.21) și (1.24) se determină modulele de rezistență axiale și respectiv razele de inerție centrale.

Etapele menționate se aplică pentru cazul general. În cazul existenței axelor de simetrie calculul se simplifică (vezi aplicația următoare).

Aplicații

1) Să se determine caracteristicile geometrice ale unei secțiuni în formă de coroană circulară cu diametrul exterior **D** și cel interior **d**. (figura 1.7).

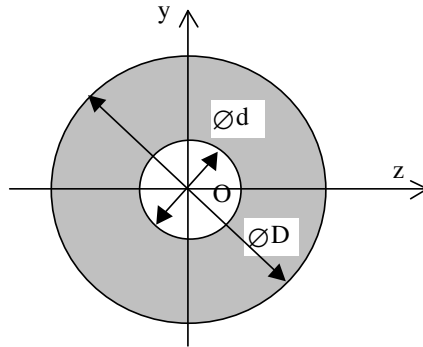


Figura 1.7

Suntem în situația unei secțiuni cu două axe de simetrie. Prin urmare centrul de greutate al coroanei circulare este la intersecția axelor de simetrie. Aria și momentele de inerție ale coroanei se obțin prin sumarea algebrică a ariilor și momentelor lor de inerție ale cercurile concentrice. Prin urmare:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2); \\ I_z = I_y &= \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \\ I_p &= \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Modulele de rezistență ale coroanei se determină cu relațiile (1.21), (1.22):

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32D} (D^4 - d^4);$$

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}} = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16D} (D^4 - d^4) \quad (1.34)$$

Observație

Modulele de inerție ale unei secțiuni compuse nu se pot calcula prin sumarea algebrică a modulelor de rezistență ale figurilor componente.

Razele de inerție se calculează cu relația:

$$i_z = i_y = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \cdot \frac{4}{\pi(D^2 - d^2)}} = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2} \quad (1.35)$$

2) Să se determine caracteristicile geometrice ale secțiunii din *figura 1.8*.

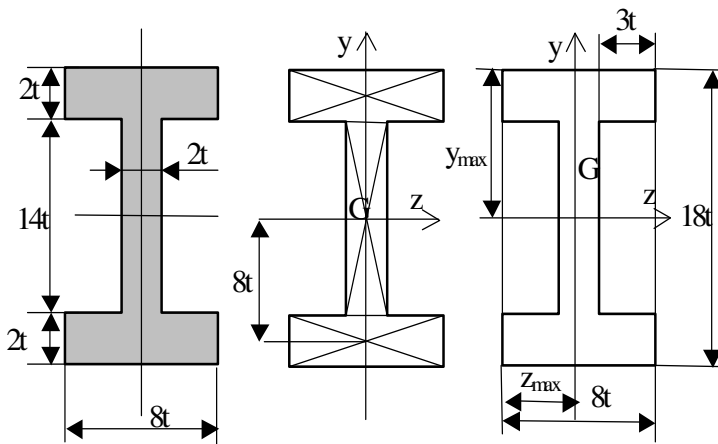


Figura 1.8

Secțiunea are două axe de simetrie. La intersecția lor se află centrul de greutate **G** al secțiunii. Pentru determinarea caracteristicilor geometrice, se alege sistemul principal central **zOy**. Se descompune secțiunea în trei dreptunghiuri.

Aria secțiunii este suma ariilor dreptunghiurilor componente:

$$A = 28t^2 + 2 \cdot 16t^2 = 60t^2 \quad (1.36)$$

Utilizând *relațiile* (1.28), (1.12) se obține:

$$I_z = I_1 = \frac{2t(14t)^3}{12} + 2 \cdot \frac{8t(2t)^3}{12} + (8t)^2(8t - 2t) = 1492t^4 \quad (1.37)$$

$$I_y = I_2 = \frac{14t(2t)^3}{12} + 2 \cdot \frac{2t(8t)^3}{12} = 180t^4 \quad (1.38)$$

Modulele de rezistență axiale se determină cu *relațiile* (1.21):

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1492t^4}{9t} \approx 165,8t^3; \\ W_y &= \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{180t^4}{4t} = 45t^3 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Razele de inerție principale se determină cu *relațiile* (1.24):

$$\begin{aligned} i_z = i_1 &= \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1492t^4}{60t^2}} \approx 5t; \\ i_y = i_2 &= \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{180t^4}{60t^2}} \approx 1,7t \end{aligned} \quad (1.40)$$

3) Să se determine caracteristicile geometrice ale secțiunii din *figura 1.9*.

Secțiunea are axă de simetrie verticală. Aceasta trece prin centrul de greutate al secțiunii și se va calcula numai y_G , față de axa Oz' , aleasă arbitrar (cu *relația* 1.6). Față de sistemul de axe figurat centrul de greutate al secțiunii are ordonata (abscisa fiind zero):

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_{Gi}}{A} = \frac{3t \cdot 12t + 6t + 9t \cdot 4t + 14t}{12t + 3t + 4t} = 10t \quad (1.41)$$

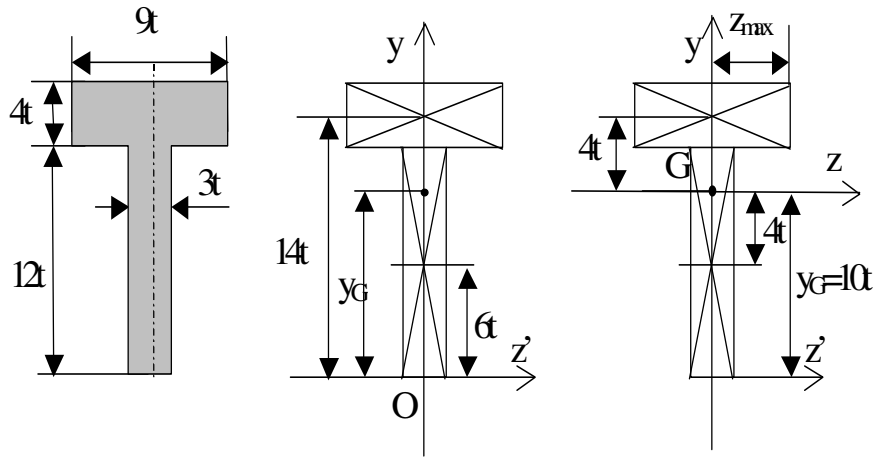


Figura 1.9

Axa **Oy** (axa de simetrie) este axă de inerție principală. Sistemul de axe **zGy** este sistem principal central. Momentele de inerție centrale principale se determină cu relațiile (1.28), (1.12):

$$I_z = I_1 = \frac{3t(12t)^3}{12} + (4t)^2 \cdot 36t^2 + \frac{9t(4t)^3}{12} + (4t)^2 \cdot 36t^2 = 1632t^4 \quad (1.42)$$

$$I_y = I_2 = \frac{12t \cdot (3t)^3}{12} + \frac{4t \cdot (9t)^3}{12} = 108t^4 \quad (1.43)$$

Se calculează modulele de rezistență axiale și razele principale de inerție

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1632t^4}{10t} = 163,2t^3 \quad (1.44)$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{108t^4}{4,5t} = 24t^3$$

$$i_z = i_1 = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1632t^4}{72t^2}} \approx 4,8t \quad (1.45)$$

$$i_y = i_2 = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{108t^4}{72t^2}} \approx 1,2t$$

4) Să se determine caracteristicile geometrice ale secțiunii compuse din figura 1.10. Suntem în situația unei secțiuni compuse oarecare fără axe de

simetrie și prin urmare pentru determinarea caracteristicilor geometrice se vor parcurge toate etapele prezentate în *paragraful 1.1.7.2*.

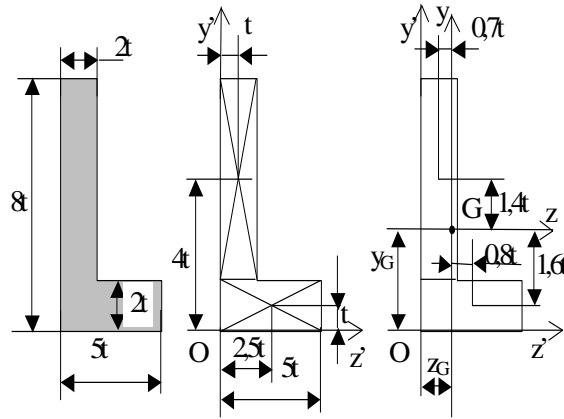


Figura 1.10

Se descompune secțiunea compusă în două dreptunghiuri și se alege arbitrar sistem de referință $z'Oy'$. Se determină cu *relația (1.6)* coordonatele centrului de greutate față de sistemul de referință arbitrar:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i y_{Gi}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{5t \cdot 2t \cdot \frac{t+6t}{2} + 2t \cdot 4t \cdot \frac{2t}{2}}{5t + 2t} \approx 2,6t; \quad (1.46)$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i z_{Gi}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{5t \cdot 2t \cdot \frac{2,5t+6t}{2} + 2t \cdot t \cdot \frac{2t}{2}}{5t + 2t} \approx 1,7t$$

Se calculează cu ajutorul relațiilor lui Steiner (relațiile 1.12), momentele de inerție centrale (față de sistemul de axe central z_Gy , un sistem de axe cu originea în centrul de greutate al figurii și cu axele paralele cu sistemul de axe ales inițial):

$$I_z = \frac{5t(2t)^3}{12} + 5t \cdot 2t \cdot (1,6t)^2 + \frac{2t(6t)^3}{12} + 2t \cdot 6t \cdot (1,4t)^2 \approx 88,5t^4 \quad (1.47)$$

$$I_y = \frac{2t(5t)^3}{12} + 5t \cdot 2t (0,8t)^2 + \frac{6t(2t)^3}{12} + 2t \cdot 6t (0,7t)^2 = 37t^4 \quad (1.48)$$

$$I_{zy} = 2t \cdot 5t \cdot 1,4t (-1,6t) + 2t \cdot 6t (-0,7t) \cdot 0,8t \approx -29,1t^4 \quad (1.49)$$

Cu *relația (1.19)* se determină, unghiul de rotire al axelor principale:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} &= \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z} = \frac{2 \cdot 29,1t^4}{37t^4 - 88,5t^4} \approx 1,13 \\ \Rightarrow \alpha_1 &\approx 24^0; \alpha_2 = 24^0 + 90^0 = 114^0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Momentele de inerție centrale principale se determină cu *relația (1.18)*:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_z - I_y)^2}{4} + I_{zy}^2} = \\ &= \frac{88,5t^4 + 37t^4}{2} \pm \sqrt{\frac{(88,5t^4 - 37t^4)^2}{4} + (29,1t^4)^2} \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$I_{1,2} \approx 62,75t^4 \pm 38,85t^4 \quad (1.52)$$

Rezultă $I_1 = 101,6 t^4$; $I_2 = 23,9 t^4$

Cu *relațiile (1.24)* se determină razele de inerție principale:

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{101,6t^4}{22t^2}} \approx 2,14t \\ i_2 &= \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{23,9t^4}{22t^2}} \approx 1,04t \end{aligned} \quad (1.53)$$

5) Să se determine caracteristicile geometrice pentru suprafața plană din *figura 1.11*.

Expresiile caracteristicilor geometrice se determină prin integrarea directă a formulelor de definiție. Se consideră o suprafață elementară de arie dA de forma unei fâșii paralele cu axa Oy , de lățime dz și înălțime y .

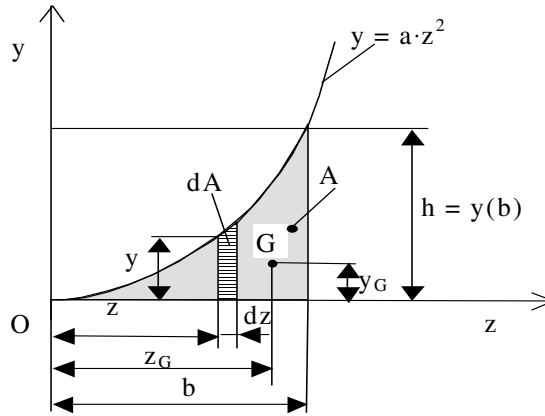


Figura 1.11

Aria suprafeței se calculează ținând cont de *relația (1.1)*:

$$A = \int_A dA = \int_0^b y dz = a \int_0^b z^2 dz = \frac{ab^3}{3} \quad (1.54)$$

Dar $ab^2 = y(b) = h$.

Prin urmare se poate scrie:

$$A = \frac{bh}{3} \quad (1.55)$$

Relației (1.55) i se poate da următoarea interpretare: aria segmentului de parabolă din *figura 1.11* este egală cu 1/3 din aria dreptunghiului “circumscriș”, de laturi b și h .

Cu același element de arie dA se pot calcula *momentul static* și *momentul de inerție* față de axa Oy , ținând cont de *relațiile (1.2)* și *(1.7)*:

$$S_y = \int_A z dA = a \int_0^b z^3 dz = \frac{ab^4}{4} = \frac{b^2 h}{4} \quad (1.56)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = a \int_0^b z^4 dz = \frac{ab^5}{5} = \frac{b^3 h}{5} \quad (1.57)$$

În mod similar se pot determina caracteristicile geometrice față de axa Oz, considerând un element de arie paralel cu această axă. Se obține:

$$S_z = \frac{bh^2}{10} \text{ și } I_z = \frac{h^3b}{14} \quad (1.58)$$

Poziția centrului de greutate G pentru suprafața plană considerată se determină cu ajutorul relațiilor (1.4):

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{S_y}{A} = \frac{b^2h}{4} \quad \frac{3}{bh} = \frac{3}{4}b \\ y_G &= \frac{S_z}{A} = \frac{bh^2}{10} \quad \frac{3}{bh} = \frac{3}{10}h \end{aligned} \quad (1.59)$$

1.2. Elemente de statică

1.2.1. Forțe și momente

Se consideră o forță $\vec{F}$, cu componentele $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$, aplicată în punctul M de coordonate x, y, z (figura 1.12). Dacă α, β, γ sunt unghiurile dintre direcția forței și axele de coordonate se poate scrie:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} \\ F &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \end{aligned} \quad (1.60)$$

unde:

$$\begin{aligned} X &= F \cos \alpha \\ Y &= F \cos \beta \\ Z &= F \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.61)$$

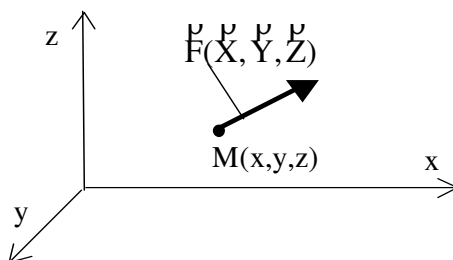


Figura 1.12

Momentul unei forțe se poate calcula față de un pol și în raport cu o axă. În ambele cazuri sensul vectorului moment se stabilește cu regula burghiului drept. Modulul momentului unei forțe $\vec{F}$ față de un punct O (față de un pol) se calculează cu relația (1.62) și este egal cu **produsul dintre modulul forței și brațul acesteia**. Brațul forței b reprezintă mărimea perpendiculară dusă din pol pe suportul forței (vezi figura 1.13):

$$M = F \cdot b \quad (1.62)$$

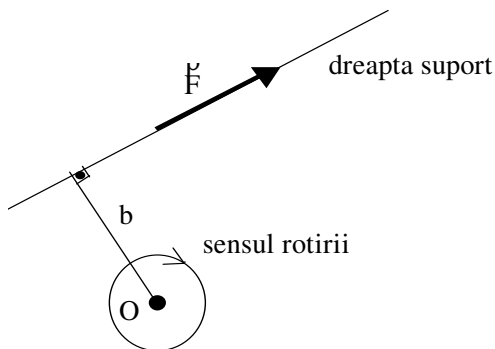


Figura 1.13

Teorema lui Varignon: Fie un sistem de forțe care admite ca sistem echivalent o rezultantă unică. Suma momentelor forțelor în raport cu un punct este egală cu momentul rezultantei sistemului, calculat în raport cu același punct. Conform teoremei lui Varignon, momentul unei forțe este egal cu suma algebrică a momentelor componentelor forței.

Momentul forței față de polul O mai poate fi exprimat și ca produs vectorial dintre vectorul de poziție al forței (care unește polul O cu punctul de aplicație al forței) și forță:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.63)$$

Momentul este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$. Așa cum am precizat sensul momentului este dat de regula burghiului drept (burghiul

este rotit în sensul de suprapunere a lui $\vec{F}$ peste $\vec{F}$ pe drumul cel mai scurt), iar mărimea momentului se determină cu relația (1.62). Dacă r_x, r_y, r_z respectiv X, Y, Z sunt componentele vectorilor $\vec{r}$ și $\vec{F}$, iar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt versorii axelor Ox, Oy și respectiv Oz momentul polar se poate determina cu relația:

$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ Y & Z \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ X & Z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ X & Y \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.64)$$

sau

$$\begin{aligned} \vec{M} &= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \\ |\vec{M}| &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Modulul momentului unei forțe în raport cu o axă este egal cu modulul momentului proiecției forței pe planul normal la axă, calculat în raport cu punctul în care axa înțeapă planul.

Cuplul (figura 1.14) este format din două forțe paralele, egale și de sensuri contrare. Acesta produce numai rotație și se reprezintă printr-un vector liber, perpendicular pe planul cuplului.

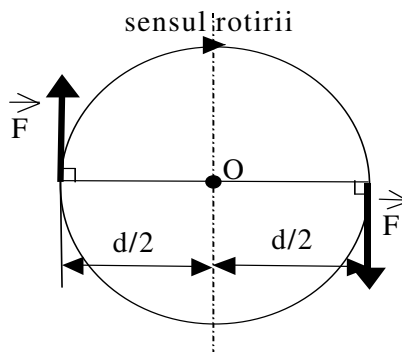


Figura 1.14

Modulul momentului care caracterizează un cuplu se calculează cu relația:

$$M = F \cdot d \quad (1.66)$$

Reducerea unei forțe în raport cu un punct al corpului este prezentată în *figura 1.15*. Se pune problema reducerii în punctul **O** a forței $\vec{F}$, care acționează în **B**. Reducerea se face prin adăugarea și scăderea forței $\vec{F}$ în punctul **O**. Astfel forța $\vec{F}$ care acționează în **B** poate fi înlocuită cu o forță $\vec{F}$ care acționează în **O** și momentul $\vec{M}$ care caracterizează cuplul produs de cele două forțe barate. De obicei **O** este ales în centrul de greutate al secțiunii.

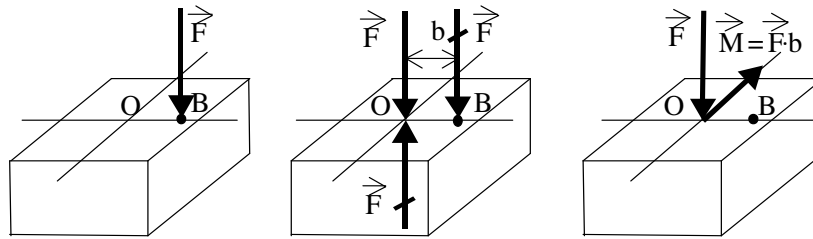


Figura 1.15

1.2.2. Ecuațiile staticii

Pentru ca un corp sau un sistem de corpuri, aflat sub acțiunea forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, să fie în echilibru, este *necesar și suficient* ca forța rezultantă și momentul resultant să fie nule ($\vec{R} = 0$; $\vec{M} = 0$). Prin urmare trebuie satisfăcute condițiile:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i(ox)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i(oy)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Z_i &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i(oz)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Relațiile (1.67) exprimă faptul că sumele algebrice ale proiecțiilor tuturor forțelor și ale momentelor față de cele trei axe trebuie să fie nule.

Dacă forțele sunt *coplanare* (sunt situate în planul xOy), relațiile (1.67) se reduc la următoarele **trei ecuații de echilibru independente**:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n X_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{i(o)} &= 0\end{aligned}\tag{1.68}$$

unde:

X_i - proiecția forței $\vec{F}_i$ pe axa Ox ;

Y_i - proiecția forței $\vec{F}_i$ pe axa Oy ;

$M_{i(o)}$ - momentul forței $\vec{F}_i$ față de axa Oz (față de punctul O în care axa Oz înțeapă planul xOy).

Observație:

În unele situații primele două ecuații din relațiile (1.68) pot fi înlocuite cu ecuații de momente, obținându-se un sistem de trei ecuații, format astfel:

- o ecuație de proiecție a forțelor și două de moment, cu precizarea că proiecția forțelor nu se face pe o direcție normală la dreapta determinată de cele două puncte față de care se scriu ecuațiile de momente;

- trei ecuații de momente, scrise față de trei puncte care nu sunt coliniare.

Dacă nu se respectă aceste condiții ecuațiile scrise nu sunt toate independente, unele fiind combinații liniare ale celorlalte.

CAPITOLUL 2

NOȚIUNI FUNDAMENTALE

2.1. Obiectul disciplinei

Rezistența materialelor este o disciplină de bază în pregătirea inginerilor. Aceasta studiază comportarea corpului solid deformabil sub acțiunea sarcinilor exterioare, a vibrațiilor sau a oboselii și stabilește metode de calcul și relații cantitative matematice care asigură în condiții economice rezistența, rigiditatea și stabilitatea ansamblurilor de mașinilor și construcțiilor

Rezistența materialelor este disciplina care studiază efectelor sarcinilor exterioare pe și în interiorul corpului luând în considerație proprietatea acestuia de a se deforma. Calculele de dimensionare și verificare se efectuează prin impunerea condițiilor de rezistență, rigiditate, stabilitate și respectiv economicitate, ținând cont de caracteristicile mecanice ale materialelor.

Cunoștințele dobândite prin studiul Rezistenței materialelor stau la baza tuturor disciplinelor de calcul și proiectare ale mașinilor și construcțiilor, disciplina fundamentând prin noțiunile teoretice și metodele de rezolvare conceptele tehnico-științifice și cunoștințele necesare pregătirii ingineresti.

2.2. Clasificarea corpurilor solide

După raportul dintre cele trei dimensiuni principale corpurile solide studiate de rezistența materialelor se pot clasifica în trei mari grupe:

1. corpuri lungi, care au o dimensiune mult mai mare decât celelalte două

Elementele caracteristice ale acestei grupe sunt axa longitudinală (locul geometric al centrelor de greutate ale secțiunii transversale), respectiv forma și dimensiunile secțiunii transversale (secțiunea normală pe axa longitudinală). La rândul ei, această categorie poate fi clasificată astfel:

- *bare* (care după forma axei pot fi: drepte, cotite, curbe). După destinație și solicitarea la care sunt supuse barele drepte, de secțiune constantă pe toată lungimea, variabilă continuu sau în trepte (bare cu tronsoane), se numesc:

- *tiranți, tije*-pentru tracțiune;
- *tije, stâlpi, coloane*-pentru compresie;
- *știfturi, pene*-pentru forfecare;
- *grinzi, osii*-pentru încovoiere;
- *arbori*-pentru răsucire și răsucire cu încovoiere.

- *cabluri, fire* (dacă dimensiunile secțiunii transversale sunt neglijabile). Acestea sunt solicitate numai la tracțiune.

2. corpuri subțiri, care au o dimensiune mult mai mică decât celelalte două

Se caracterizează din punct de vedere geometric prin forma și dimensiunile suprafeței mediane și prin grosimea măsurată perpendicular pe suprafața mediană. Corpurile din această categorie pot fi clasificate astfel:

- *plăci* (circulare, eliptice, dreptunghiulare, etc.);
- *membrane* (la care grosimea este mică și care nu pot prelua solicitări transversale sau de compresiune);
- *anvelope, învelitori* (vase, tuburi, carcase, cupole).

3. corpuri la care cele trei dimensiuni au valori comparabile

În această categorie intră:

- *bile, role;*
- *fundații, picioare de pod, baraje.*

Pentru fiecare categorie de corpuri există relații de calcul specifice.

2.3. Clasificarea sarcinilor

Forțele și momentele care solicită corpul se numesc *sarcini*. În Rezistența materialelor se consideră forțele și momentele concentrate ca fiind vectori legați (nu este permisă deplasarea punctului de aplicație pe dreapta suport) și se operează mai mult cu modulul acestora.

Sarcinile se pot clasifica după cum urmează:

1. După mărimea suprafeței pe care acționează

- *sarcini concentrate* (forțe și momente care acționează pe suprafețe ale corpurilor care pot fi considerate mici în raport cu dimensiunile corpului).
- *sarcini distribuite* (forțe și momente care acționează pe suprafețe mari).

În practică sarcinile pot fi uniforme (*figura 2.1a*) și liniar distribuite (*figura 2.1b*) sau pot fi întâlnite și forțe distribuite după legi parabolice (*figura 2.1c*),

exponențiale, etc. Intensitatea forțelor distribuite în plan se exprimă în $[N/mm]$ sau va fi măsurată în $[N/mm^2]$ (în cazul forțelor provenite din presiune, a greutateii unei învelitori sau a unei plăci). În *figura 2.1* se prezintă porțiuni de grindă încărcate cu diverse forțe distribuite și se indică forțele concentrate static echivalente. Se demonstrează că intensitatea forței rezultante concentrate (măsurată în $[N]$), static echivalentă cu cea distribuită, este numeric egală cu aria suprafeței, cuprinsă între curba de variație a forței distribuite și grindă și că punctul de aplicație al forței rezultante coincide cu abscisa centrului de greutate al suprafeței respective. Aceleași observații sunt valabile și în cazul forțelor axiale distribuite uniform, respectiv liniar sau o forțelor care au o altă orientare față de corp.

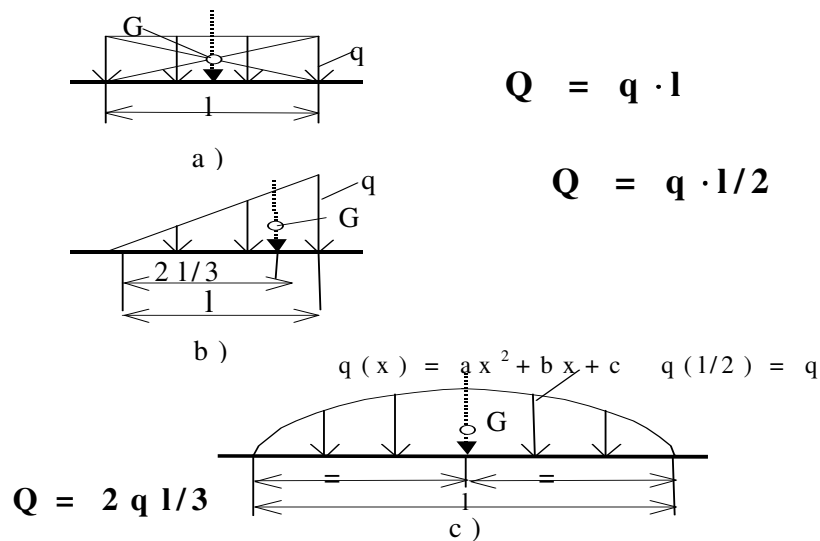


Figura 2.1.

Observații:

a) Pentru o bară de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, greutatea este o forță uniform distribuită. Intensitatea acestei forțe distribuite poate fi aflată împărțind greutatea barei la lungimea acesteia $[N/mm]$ și reprezintă deci greutatea unității de lungime.

b) Forțele de greutate și de inerție (forțe masice) sunt forțe distribuite. Greutatea a fost înlocuită cu o forță rezultantă concentrată, static echivalentă, care acționează în centrul de greutate al corpului.

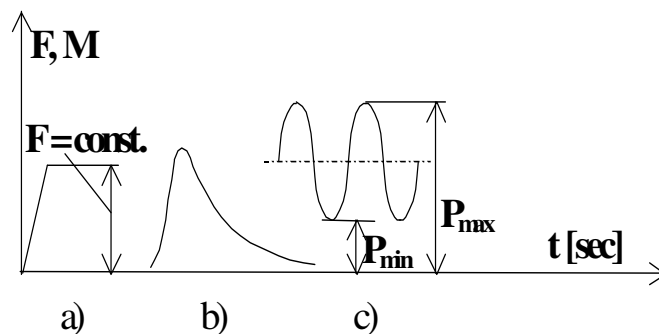
c) Înlocuirea forțelor distribuite cu forțe concentrate nu este posibilă decât într-un număr limitat de situații (de ex. calculul reacțiunilor) când corpul încă este considerat rigid. Ulterior această înlocuire nu mai este admisă, deoarece ar modifica modul de deformare al corpului.

d) Momentele distribuite se întâlnesc rar în practică.

2. După variația lor în timp

- sarcini statice (intensitatea sarcinii crește într-un timp relativ îndelungat și rămâne constantă după ce a atins intensitatea maximă).

- sarcini dinamice, care pot fi periodice sau aperiodice. Tot în această categorie intră și sarcinile care se aplică cu viteză mare (de ex. șocurile). În acest caz intensitatea sarcinii variază de la zero la o valoare maximă într-un timp foarte scurt. În figura 2.2 sunt reprezentate categoriile de sarcini menționate.



a) sarcini statice

b) sarcini dinamice cu șoc

c) sarcini dinamice periodice

Figura 2.2.

3. După importanță

- sarcini principale (reprezintă sarcinile prevăzute care sunt practic preluate de corpul care este studiat);

- *sarcini secundare* (greutatea proprie a corpului, forțele de frecare, forțele provenite din presiunea vântului);

- *sarcini extraordinare sau accidentale*. Aceste sarcinile pot fi prevăzute sau neprevăzute și apar întâmplător la intervale de timp. Cu toate că acționează intermitent pot avea efecte catastrofale. Se datoresc unor cataclisme (cutremure, inundații) sau unor accidente din procesele tehnologice (explozii).

2.4. Forțe și momente exterioare

2.4.1. Reazeme și reacțiuni

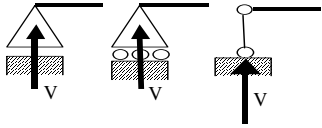
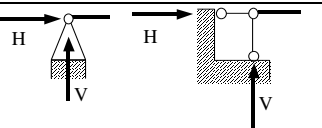
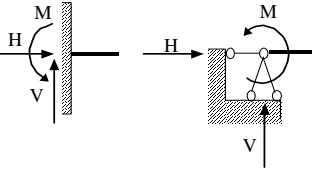
2.4.1.1. Tipuri de reazeme

În Rezistența materialelor corpurile sunt figurate și studiate în legătură cu alte corpuri înconjurătoare, adică împreună cu *legăturile* sau *reazemele* lor. Acestea au rolul de a suprima anumite grade de libertate ale corpului. Acest lucru se realizează prin apariția în reazem a unor forțe (care împiedică una sau două translații) și/sau momente (care împiedică rotirea). Forțele și momentele care apar în reazeme se numesc *reacțiuni*. În categoria sarcinilor exterioare intră și reacțiunile care împreună cu sarcinile care solicită corpul formează un sistem în echilibru. Calculul reacțiunilor reprezintă o problemă importantă în Rezistența materialelor.

În *tabelul 2.1* se prezintă tipurile de reazeme, reprezentările schematizate și reacțiunile care apar în fiecare tip de reazem. Pentru fiecare tip de reazem ultima reprezentare din tabel indică *reprezentarea pendulară*. Se utilizează în special primele reprezentări schematizate.

Rezemarea simplă suprimă un grad de libertate (translația pe direcția verticală) și permite translația pe direcția orizontală și rotirea. Practic această rezemare se poate realiza prin lagăre, prin intermediul unor role.

Tabelul 2.1

Denumirea reazemului	Nr de grade de libertate suprimate	Reprezentări schematizate
Rezemare simplă	1	
Articulația cilindrică (simplă)	2	
Încadrarea	3	

Articulația cilindrică sau articulația simplă suprimă două grade de libertate (translația pe direcția verticală și pe direcția orizontală) și permite rotirea). Practic această rezemare se poate realiza prin lagăre de alunecare sau rostogolire.

Încadrarea suprimă translația pe două direcții și rotirea deci preia toate gradele de libertate. Barele încadrate la un capăt și libere la celălalt se numesc bare în *consolă*. O grindă fixată în zid, o bară sudată de un corp masiv fix pot fi considerate bare încadrate.

Reazemele prezentate în *tabelul 2.1* pot fi considerate în mod ideal perfect rigide deoarece au deformații mult mai mici decât corpurile pe care le fixează. În practică pot fi întâlnite și reazeme a căror deformații nu mai pot fi neglijate

(arcuri, tampoane de cauciuc, rezemarea șinelor pe sol, etc.) care sunt numite reazeme tasabile (elastice).

2.4.1.2. Calculul reacțiunilor

Calculul analitic al reacțiunilor se efectuează cu respectarea următoarelor etape:

- schematizarea formei corpului;
- schematizarea modului de rezemare (stabilirea tipului de reazem și figurarea reacțiunilor corespunzătoare);
- schematizarea modului de încărcare (stabilirea forțelor și a cuplurilor);
- scrierea ecuațiilor de echilibru pentru sistemul de sarcini coplanare (*relațiile (1. 65)*) cu alegerea arbitrară a convențiilor de semne;
- rezolvarea sistemului de ecuații, determinarea și verificarea reacțiunilor.

Observații:

1) *Calculul reacțiunilor se efectuează în ipoteza că deformațiile elastice și deplasările sunt în general mici în raport cu dimensiunea corpurilor și deci nu influențează sensibil valoarea reacțiunilor. Prin urmare ecuațiile de echilibru sunt scrise pentru poziția inițială a corpului considerat rigid și nedeformat.*

2) *În plan pot fi scrise numai trei ecuații independente. De obicei, acestea sunt: două ecuații de proiecții a forțelor și o ecuație de momente (relațiile 1. 65).*

3) *Ecuațiile de echilibru mai pot fi scrise sub una din formele:*

- o ecuație de proiecție a forțelor și două de moment, cu precizarea că proiecția forțelor nu se face pe o direcție normală la dreapta determinată de cele două puncte față de care se scriu ecuațiile de momente;
- trei ecuații de momente, scrise față de trei puncte care nu sunt coliniare.

4) *Dacă numărul reacțiunilor este cel mult egal cu numărul ecuațiilor de echilibru, acestea pot fi calculate din ecuațiile staticii. Asemenea sisteme se*

numesc **static determinate**. Condiția pentru ca un sistem să fie static determinat poate fi scrisă:

$$NN \leq NE \quad (2.1)$$

unde: NN = numărul necunoscutelor (reacțiuni sau uneori eforturi);

NE = numărul ecuațiilor staticii care nu sunt identic nule.

5) Dacă numărul necunoscutelor (reacțiunilor) depășește pe cel al ecuațiilor de echilibru sistemul este **static nedeterminat**. La aceste sisteme:

$$NN > NE \quad (2.2)$$

Diferența dintre numărul de necunoscute și numărul ecuațiilor de echilibru poartă numele de grad (ordin) de nedeterminare. În acest caz reacțiunile se determină prin rezolvarea sistemului format din ecuațiile de echilibru completate cu un număr de ecuații scrise în urma studierii deformațiilor corpului, egal cu gradul de nedeterminare.

Aplicații

Să se calculeze reacțiunile pentru următoarele grinzi:

1) grinda în consolă încărcată cu o forță concentrată (**figura 2.3**)

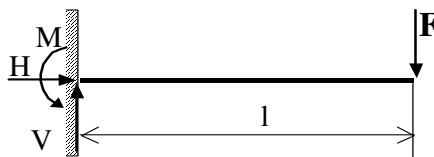


Figura 2.3.

Se figurează reacțiunile V , H , M din încastrare și se scriu cele trei ecuații de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \Rightarrow H = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V - F = 0 \Rightarrow V = F \\ \sum M &= 0 \Rightarrow F l - M = 0 \Rightarrow M = F l \end{aligned} \quad (2.3)$$

Suma de momente a fost scrisă față de încastrare.

2) grinda în consolă solicitată de un moment concentrat (**figura 2.4**)



Figura 2.4

Se figurează reacțiunile V_1 , H_1 , M_1 și se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow M - M_1 = 0 \Rightarrow M = M_1\end{aligned}\tag{2.4}$$

3) grinda rezemată solicitată de o forță concentrată (**figura 2.5**)

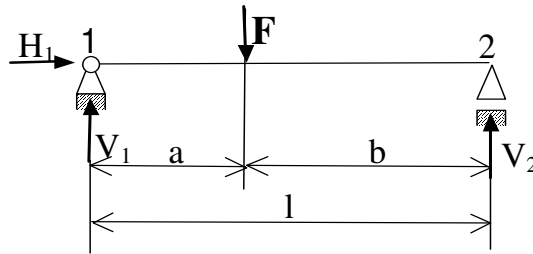


Figura 2.5

Se figurează reacțiunile V_1 , H_1 , V_2 și se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow H_1 = 0\tag{2.5}$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 - F + V_2 = 0\tag{2.6}$$

Ultima ecuație are două necunoscute. Pentru a evita rezolvarea unui sistem, se vor scrie două ecuații de moment, față de reazemele 1 și 2 (ecuații care conțin o singură necunoscută V_2 și respectiv V_1):

$$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow V_2 l - F a = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{F}{l} a \quad (2.7)$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow V_1 l - F b = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{F b}{l} \quad (2.8)$$

În multe exemple este mai avantajos să se aleagă această variantă.

Cu ajutorul *relației* (2.6) se verifică dacă reacțiunile au fost corect calculate (reacțiunile astfel calculate vor fi înlocuite în relație pe care o transformă într-o identitate, dacă au fost corect determinate). Înlocuind (2.7) și (2.8) în (2.6) rezultă:

$$\frac{Fb}{l} - F + \frac{F a}{l} = \frac{F (a + b)}{l} - F = \frac{F l}{l} - F \equiv 0$$

2.5. Forțe și momente interioare

Încărcând corpul cu sarcini, acesta se deformează ca urmare a variației distanțelor interatomice. Dacă sarcinile nu depășesc anumite valori, pentru care deplasarea atomilor se face în jurul poziției de echilibru, atomii revin în poziția de echilibru după îndepărtarea sarcinilor și *corpul are un comportament perfect elastic*. Ruperea corpului înseamnă de fapt desfacerea legăturilor dintre perechile de atomi, separate prin secționare.

Chiar înainte de începutul solicitării corpului în interiorul lui există forțe puternice de atracție între atomi, molecule care îi conservă forma și volumul (forțe de coeziune). Sub acțiunea forțelor exterioare apar în corp forțe interioare suplimentare care caută să se opună deformării corpului. Atât forțele de coeziune cât și forțele interioare suplimentare nu apar în studiul echilibrului corpului, ele făcându-și echilibru în interior. Pentru a pune în evidență forțele interioare și ale transpune în categoria forțelor exterioare în Rezistența materialelor se folosește **metoda secțiunilor**. Sensul atribuit termenului de secționare este acela de suprimare a legăturilor interioare dintre particulele aflate de o parte și de cealaltă a suprafeței cu care imaginar s-a tăiat corpul. Metoda secțiunilor transferă

eforturile din categoria forțelor și momentelor interioare în cea a forțelor și momentelor exterioare.

Metoda constă în:

- se secționează imaginar corpul solid în zona în care urmează să fie determinate forțele interioare (eforturile);
- se reprezintă pe porțiunile de corp rezultate prin secționare sarcinile exterioare și forțele interioare aferente (pe cele două părți rezultate în urma secționării se figurează acțiunea părții îndepărtate asupra părții rămase);
- se izolează oricare din cele două părți rezultate după secționare;
- se aplică ecuațiile de echilibru la sarcinile exterioare și forțele interioare reprezentate pe câte o porțiune a solidului secționat.

Se consideră un corp solid asupra căruia acționează un sistem de sarcini în echilibru (*figura 2.6a*) în care se face o secțiune imaginară cu planul P normal pe axa longitudinală și se pun în evidență forțele interatomice de legătură. Aceste forțe sunt perechi, egale și de sensuri contrare, conform legii acțiunii și reacțiunii (*figura 2.6b*).

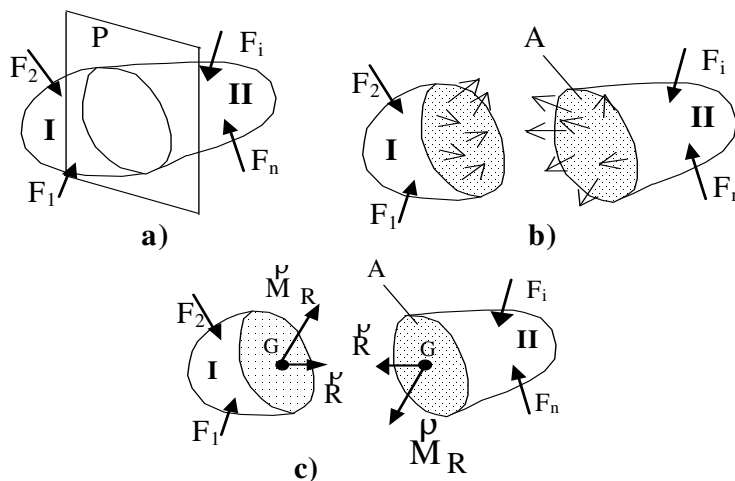


Figura 2.6.

Corpul se secționează în două părți I și II . Cât timp nu se introduce nici o altă forță în afara celor inițiale, cele două porțiuni de bară nu mai sunt în

echilibru. Dacă se îndepărtează porțiunea **II**, pentru ca porțiunea **I** să rămână în echilibru va trebui ca în secțiunea de separație să se aplice o forță $\vec{R}$, care acționează într-un punct oarecare al secțiunii. Aceasta reprezintă rezultanta tuturor forțelor de legătură de pe secțiunea uneia din părți și trebuie să echilibreze forțele de pe partea înlăturată. Reducând această forță la centrul de greutate **G** al secțiunii se va obține rezultanta $\vec{R}$ și momentul resultant $\vec{M}_R$, numite **eforturi** (figura 2.6c). Eforturile $\vec{R}$ și $\vec{M}_R$ de pe cele două fațete sunt egale și de sensuri contrare. Se alege un sistem triortogonal de axe **principal central** cu originea în **G** (centrul de greutate al secțiunii transversale) în care axa **Ox** coincide cu axa geometrică a corpului. Componentele eforturilor după cele trei axe sunt (figura 2.7):

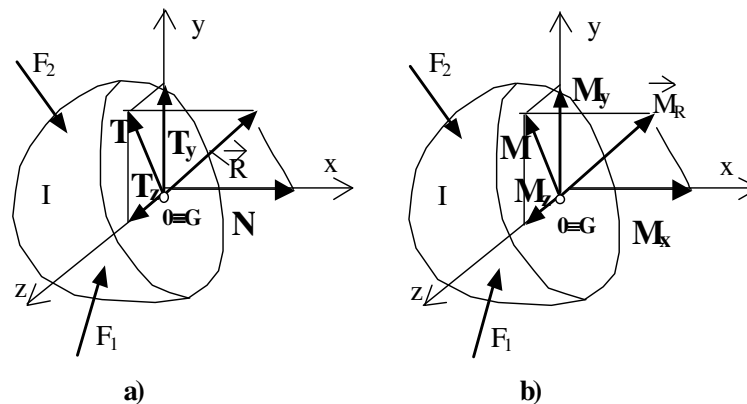


Figura 2.7.

- componenta N , *normală la secțiune*, se numește **forță axială** și apare în cazul solicitărilor de tracțiune sau compresiune (solicitări axiale);
- componentele T_y și T_z sunt în *planul secțiunii* și se numesc **forțe tăietoare**;
- componenta M_x este *normală* pe secțiune, apare la torsiunea (răsucirea) barelor și se numește **moment de torsiune**;
- componentele M_z și M_y sunt în *planul secțiunii*, se numesc **momente de încovoiere (momente încovoietoare)** și apar la solicitarea de încovoierea.

Utilizând metoda secțiunilor cele șase componente ale eforturilor sunt puse în evidențierea și scriind ecuațiile de echilibru pentru o porțiune din corpul astfel secționat, eforturile se pot determina după cum urmează:

- **forța axială** N este egală cu suma algebrică a tuturor proiecțiilor forțelor exterioare pe axa Ox (axa barei);

- **forțele tăietoare** T_y și T_z sunt egale cu suma algebrică a proiecțiilor tuturor forțelor exterioare pe axa Oy și respectiv Oz ;

- **momentul de torsiune** M_x este egal cu suma algebrică a tuturor cuplurilor exterioare dirijate după axa Ox ;

- **momentele încovoietoare** M_z și M_y sunt egale cu suma algebrică a tuturor momentelor exterioare față de axa Oy și respectiv Oz .

Observatie:

În plan se există cel mult trei componente nenule.

Dacă se cunosc valorile eforturilor atunci se poate stabili care sunt cele mai solicitate puncte ale corpului și pe această bază se poate aprecia dacă corpul rezistă sau nu sarcinilor aplicate sau se pot calcula dimensiunile corpului astfel încât rezistența acestuia să fie asigurată.

Utilizând definițiile de mai sus se pot stabili eforturile în orice secțiune a corpului și se pot trasa curbele lor de variație, numite **diagrame de eforturi**.

În plan pentru trasarea acestor diagrame se folosesc următoarele **reguli de semne**:

- **forța axială** este considerată pozitivă atunci când produce o solicitare de întindere în secțiunea considerată și negativă atunci când produce o solicitare de compresiune;

- **forța tăietoare** este considerată pozitivă atunci când acționează de jos în sus în stânga secțiunii sau de sus în jos în dreapta secțiunii;

- **momentul încovoietor** este considerat pozitiv când grinda este deformată încât concavitatea curbei este orientată în sus; în situație contrară momentul încovoietor este negativ.

Aceste reguli de semne sunt obligatorii.

2.6. Relații diferențiale între sarcini și eforturi

Se considera o bară dreaptă încărcată cu două sarcini distribuite oarecare $q_y(x)$ și $q_x(x)$. Se izolează un element de lungime dx (figura 2.9a). Pe lungimea dx sarcinile $q_y(x)$ și $q_x(x)$ se consideră constante. Se figurează eforturile (figura 2.9b) și se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul de bară considerat:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow (N + dN) + q_x(x)dx - N = 0 \quad (2.9)$$

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow (T_y + dT_y) - q_y(x)dx - T_y = 0 \quad (2.10)$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow M_z - T_y dx - q_y(x)dx \frac{dx}{2} - (M_z + dM_z) = 0 \quad (2.11)$$

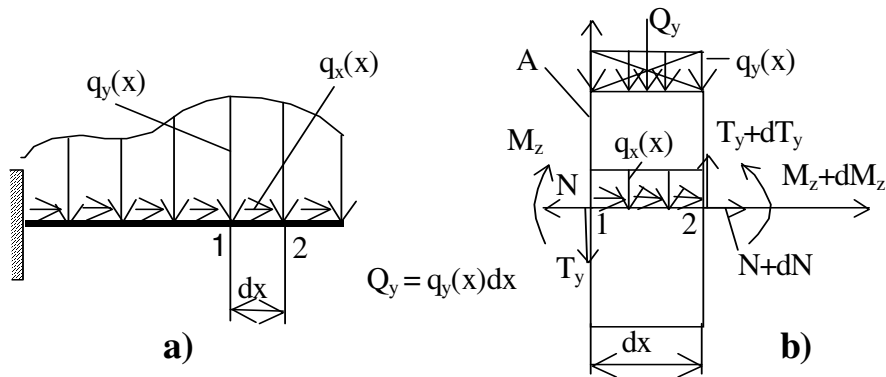


Figura 2.9

Din primele două relații, respectiv din ecuația de momente (2.11) (în care se neglijează infiniții mici de ordinul al doilea) rezultă următoarele relațiile diferențiale între sarcini și eforturi:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dx} &= -q_x(x) \\
\frac{dT_y}{dx} &= q_y(x) \\
\frac{dM_z}{dx} &= T_y
\end{aligned}
\tag{2.42}$$

Așadar, derivata forței axiale N în raport cu x este egală cu intensitatea încărcării q_x ce acționează în lungul barei luată cu semn schimbat. Derivata forței tăietoare T_y în raport cu variabila x este egală cu intensitatea încărcării transversale q_y , iar derivata momentului încovoietor M_z este egală cu forța tăietoare în secțiunea considerată.

Din ultimele două *relații* (2.12) se poate scrie:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y(x)
\tag{2.13}$$

2.7. Tensiuni

Se ia în considerare un element de arie ΔA , din jurul punctului M de pe suprafața secțiunii corpului studiat anterior. Dacă aria elementară este suficient de mică repartiția forțelor de legătură poate fi considerată aproximativ constantă, iar rezultanta $\Delta \vec{R}$ a acestor forte poate fi aplicată în centrul de greutate al elementului. **Tensiunea medie** pe suprafața ΔA se poate calcula cu relația:

$$p_{med\Delta A} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A}
\tag{2.14}$$

Considerând materia continuă se poate restrânge oricât de mult elementul de suprafață în jurul punctului M , trecerea la limită fiind permisă în aceste condiții. Se obține astfel valoarea **tensiunii** în punctul M :

$$p_M = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{d\vec{R}}{dA}
\tag{2.15}$$

Unitatea de măsură a tensiunii este $[N/mm^2 = MPa]$ și depinde atât de $d\vec{R}$ cât și de orientarea elementului de suprafață $d\vec{A}$ (tensiunea fiind o mărime tensorială).

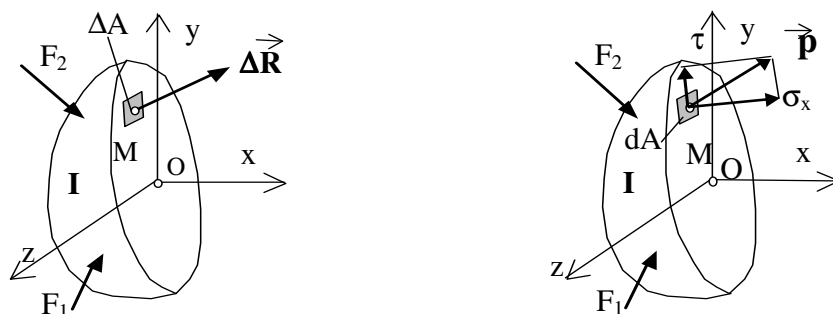


Figura 2.10

Tensiunea poate fi descompusă (vezi figura 2.10) în două componente:

- pe direcția normalei în componenta σ_x , numită **tensiune normală** (orientată de direcția axei Ox);
- pe planul secțiunii în componenta τ , numită **tensiune tangențială**.

La rândul său, componenta τ poate fi descompusă în planul yOz , (la care Ox este normală) obținându-se componentele τ_{xy} și τ_{xz} (figura 2.11) care sunt paralele cu axele Oy și respectiv Oz . Pentru cele două tensiuni tangențiale semnificația indicilor este următoarea: primul indice desemnează axa normală la planul secțiunii (axa Ox) iar al doilea axa cu care tensiunea este paralelă (axele Oy și respectiv Oz).

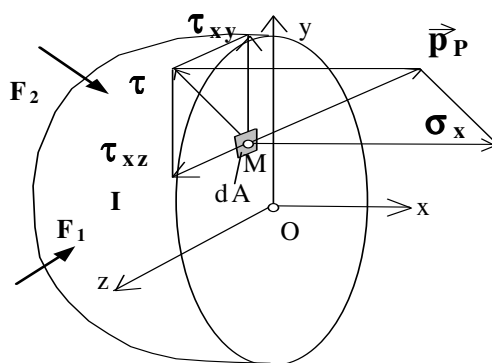


Figura 2.11.

2.8. Ecuații de echivalență (relații între eforturi și tensiuni)

Se consideră porțiunea I , aflată în echilibru, izolată din corpul solid considerat prin metoda secțiunii. Se figurează cele șase eforturi (N T_y T_z respectiv M_x M_y M_z) și cele trei tensiuni (σ_x τ_{xy} τ_{xz}) într-un punct M al secțiunii (vezi figurile 2.12a și 2.12b), situat la distanțele z , y față de cele două axe respectiv r față de centrul de greutate. Se alege un sistem de referință cu originea în centrul de greutate al secțiunii transversale.

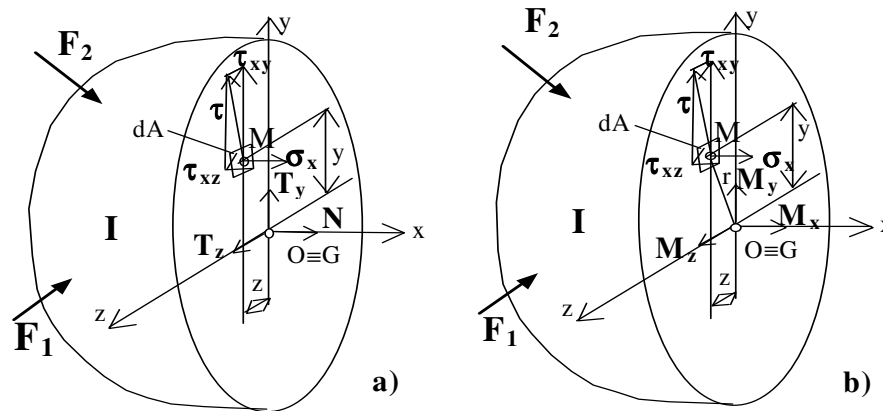


Figura 2.12

Pentru porțiunea de corp considerată se scriu ecuațiile de echilibru în secțiune (trei ecuații de proiecții ale forțelor pe axe și trei ecuații de moment față de axe – vezi relațiile 1.64), forțele elementare fiind egale cu produsul dintre tensiuni și elementul de suprafață dA :

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad (2.16)$$

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (2.17)$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad (2.18)$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xy}z - \tau_{xz}y) dA = \int_A \tau r dA \quad (2.19)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (2.20)$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA \quad (2.21)$$

Ecuatiile de echilibru (2.16-2.21) stabilesc *relații între eforturi și tensiuni* și se numesc **ecuații de echivalență**. Fiecare integrală se referă la aria totală A a secțiunii transversale a corpului solid. Deoarece nu conțin caracteristici fizice de material aceste ecuații sunt valabile pentru orice corp solid.

2.9. Solicități simple

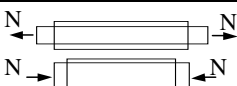
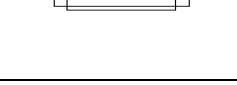
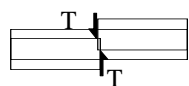
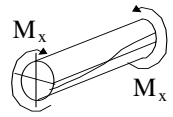
Cele mai simple cazuri întâlnite în practică sunt cele în care pe secțiunea corpului apare o singură componentă a eforturilor și respectiv tensiunilor. Acestea se numesc **solicități simple**.

Există patru solicitări simple: *solicitățile axiale (tracțiune sau compresiune), forfecare, torsiune și încovoiere* (vezi tabelul 2.2).

Tracțiunea și compresiunea se numesc solicitări axiale deoarece suporturile forțelor sunt dirijate tangent la axa geometrică a barei. La acestea diferă între ele numai semnul eforturilor, tensiunilor și alungirilor specifice: pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresiune. La comprimarea barelor zvelte (lungi în raport cu dimensiunea secțiunii transversale), peste anumite valori ale forței bara părăsește forma rectilinie și apare fenomenul de *flambaj* (pierderea stabilității). *Flambajul nu este o solicitare*.

Forfecarea este produsă de două forțe egale și de sens contrar ce acționează pe un suport perpendicular pe axa geometrică a corpului.

Tabelul 2.2

Solicitarea	Schema de solicitare	Efort nenul	Tensiune
Tracțiune		$N > 0$	$\sigma > 0$
Compresiune		$N < 0$	$\sigma < 0$
Forfecare (Tăiere)		T_y (sau T_z)	τ
Torsiune (Răsucire)		M_x	τ
Încovoiere		M_z (sau M_y)	σ

Solicitarea de *torsiune* este produsă de cupluri de forțe conținute în plane perpendiculare pe axa geometrică a corpului.

Solicitarea de *încovoiere* poate fi *încovoiere pură* și *încovoiere simplă*. Prin *încovoiere pură* se înțelege deformarea unei grinzi produsă de un sistem de forțe static echivalente care produc în secțiunea transversală un moment încovoiator, la cărui vector este dirijat după una din axele principale ale secțiunii transversale. În cazul solicitării de *încovoiere simplă* în secțiunea transversală a grinzii apare pe lângă un moment încovoiator și o forță tăietoare.

În practică se întâlnesc și ***solicitările compuse***. Acestea se produc atunci când în secțiunea corpului apar simultan cel puțin două componente ale eforturilor și tensiunilor.

2.10. Deplasări și deformații

Se înțelege prin ***deplasare*** modificarea poziției unui punct sau a unei secțiuni a corpului. Rezistența Materialelor se ocupă cu studiul deplasărilor

elastice sau elasto-plastice produse ca urmare a deformării corpului, atunci când acesta își modifică dimensiunile și forma geometrică inițială.

Prin **deformație** se înțelege modificarea distanței dintre puncte sau secțiuni, sau a unghiurilor dintre două segmente duse printr-un punct. Modificările lungimilor segmentelor se numesc **deformații liniare** iar modificările unghiurilor **deformații unghiulare** sau **lunecări**.

Deformațiile depind de forma și dimensiunile corpului, de mărimea și modul de aplicare al sarcinilor și de anumite caracteristici mecanice ale materialelor. Dacă deformațiile dispar după înlăturarea sistemului de sarcini (corpul revine la forma și dimensiunile inițiale), se spune că avem **deformații elastice**. Pentru majoritatea materialelor utilizate la realizarea structurilor de rezistență deformațiile elastice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpurilor confecționate din aceste materiale. Se face precizarea că, în cele ce urmează ne vom referi la **deformații elastice mici**.

Se considera un corp solid. Punctele **C**, **D** din interiorul corpului determină segmentul **[CD]**, iar punctele **M**, **O**, **N** segmentele **[OM]** și **[ON]** astfel încât între acestea să existe un unghi drept (figura 2.13). După deformarea corpului punctele se deplasează în **C'**, **D'**, **M'**, **N'** și **O'**.

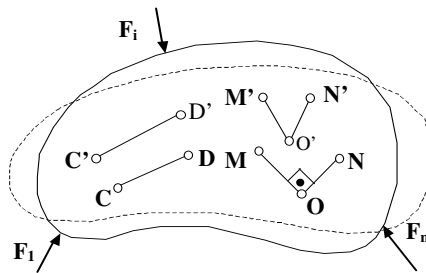


Figura 2.13

Se definește ca fiind **deformație liniară absolută** variația lungimii segmentului **[CD]**:

$$\delta = \Delta l = [C'D'] - [CD] = l - l_0 \quad (2.22)$$

Această mărime se măsoară în unități de lungime [mm].

Se numește **deformație liniară specifică** sau **alungire specifică** (alungirea unității de lungime) limita raportului dintre deformația liniară absolută și lungimea inițială a segmentului [CD]:

$$\varepsilon = \lim_{[CD] \rightarrow 0} \frac{[C'D'] - [CD]}{[CD]} \quad (2.23)$$

Ținând cont de *relația* (2.23) ultima relație devine:

$$\varepsilon = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{\delta}{l_0} = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{l - l_0}{l_0} \quad (2.24)$$

Alungirea specifică este o *mărime adimensională*. Ea poate fi exprimată în procente [%] prin înmulțirea raportului cu 100.

Dacă dimensiunile cresc ($\varepsilon > 0$) termenul de alungire specifică va fi înlocuit cu termenul de **lungire specifică**, iar dacă segmentul [CD] își micșorează dimensiunile se folosește termenul de **scurtare specifică** ($[C'D'] < [CD]$ și $\varepsilon < 0$).

Odată cu lungirea unei bare supuse la tracțiune are loc un fenomen numit *contracție transversală* (se produce o micșorare a dimensiunilor secțiunii transversale). Dacă *lungirea specifică* pe direcția longitudinală (direcția solicitării) se notează ε_{long} iar *scurtarea specifică* pe direcție transversală cu $\varepsilon_{transv.}$, raportul acestor alungiri este constant și poartă numele de **coeficientul lui Poisson**:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}} \quad (2.25)$$

Coeficientul lui Poisson ν este o mărime pozitivă și adimensională.

Pentru solicitarea de tracțiune se consideră convențional $\varepsilon_{long} > 0$, $\varepsilon_{transv} < 0$. Prin urmare din *relația* (2.25) se poate scrie:

$$|\varepsilon_{transv}| = \nu \varepsilon_{long} \quad (2.26)$$

Se consideră un cub cu latura unitară supus la tracțiune (*figura 2.14*). După solicitare cubul se deformează, iar volumul prisme rezultate V_f poate fi scris:

$$V_f = (1 - |\epsilon_{\text{transv}}|) (1 - |\epsilon_{\text{transv}}|) (1 + \epsilon_{\text{long}}) \quad (2.27)$$

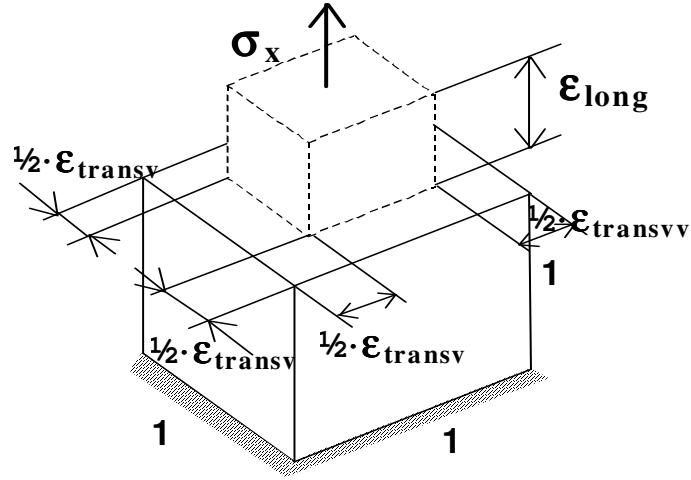


Figura 2.14.

Limita superioară a coeficientului de contracție transversală se determină presupunând ca volumul unitar se deformează fără variație de volum (pentru un *material incompresibil* volumul rămâne constant $V_f = V_i$). Volumul cubului este $V_i = 1$. Ținând cont de *relația* (2.26) ultima expresie devine:

$$1 = (1 - \nu \epsilon_{\text{long}})^2 (1 + \epsilon_{\text{long}}) \quad (2.28)$$

sau
$$1 = [1 - 2\nu \epsilon_{\text{long}} + (\nu \epsilon_{\text{long}})^2] (1 + \epsilon_{\text{long}}) \quad (2.29)$$

Prin dezvoltare și neglijarea termenilor infinit mici de ordin superior (deoarece alungirile specifice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpului, iar coeficientul lui Poisson este subunitar) se poate scrie:

$$1 \approx 1 - 2\nu \epsilon_{\text{long}} + \epsilon_{\text{long}} \quad (2.30)$$

sau
$$2\nu \epsilon_{\text{long}} \approx \epsilon_{\text{long}} \quad (2.31)$$

de unde

$$\nu \approx \frac{1}{2} \quad (2.32)$$

Pentru $\nu = 0,5$ volumul barei rămâne constant pe parcursul solicitării. Valoare stabilită mai sus a fost dedusă pentru un *material incompresibil*, cum ar fi lichidele. Gazele perfecte ar avea $\nu = 0$. Pentru $\nu < 0,5$ volumul barei crește la tracțiune și se micșorează la comprimare. Pentru multe materiale metalice el are valori în jur de 0,3. Coeficientul lui Poisson este o constantă elastică de material. În *tabelul 2.3* sunt indicate valori ale coeficientului de contracție transversală pentru unele materiale solide.

Se numește **deformație unghiulară** sau **lunecare specifică** mărimea cu care variază unghiul drept construit în vecinătatea punctului *O*.

Tabelul 2.3.

Material	ν
Oțel carbon	0,25...0,29
Cu, Mg, Bronz	0,31...0,35
Pb	0,45
Al	0,33
Zinc laminat	0,27
Sticlă	0,24...0,27
Cauciuc	0,47
Beton	0,1...0,15
Fontă cenușie	0,21
Fontă maleabilă	0,17

Se consideră corpul prismatic din *figura 2.15*. Dacă se consideră fața de jos imobilă, lunecarea fețelor paralel cu ele însele se poate măsura prin unghiul γ care măsoară variația unghiului drept. ΔS se numește **lunecare absolută**, iar γ **lunecare specifică**. Deoarece lunecarea specifică este foarte mică se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{h} \approx \gamma \quad (2.33)$$

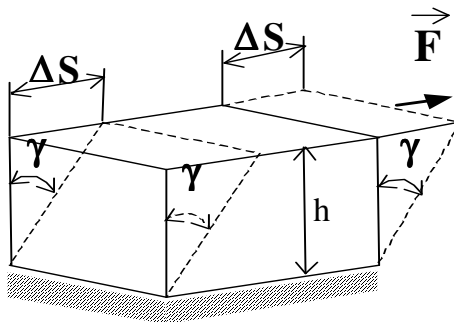


Figura 2.15.

Lunecarea specifică γ este tot o mărime adimensională, care se măsoară în radiani. Convențional se consideră *γ pozitiv* atunci când corespunde micșorării unghiului drept.

CAPITOLUL 3

ÎNCERCAREA MATERIALELOR

IPOTEZE SIMPLIFICATOARE

METODE DE CALCUL ÎN REZISTENȚA

MATERIALELOR

3.1. Încercarea materialelor

3.1.1. Considerații generale

Caracteristicile mecanice și elastice ale materialelor, definite în acest capitol, au o mare importanță în calculele din Rezistența Materialelor și Teoria Elasticității și sunt determinate în urma unor încercări mecanice, efectuate în laborator, pe mașini speciale. Aceste caracteristici se determină pe *probe* sau *epruvete*, reprezentând eșantioane cu o anumită configurație geometrică, prelevate din semifabricate ale materialului studiat. Forma și dimensiunile acestora depind de materialul care se studiază și de tipul solicitării la care sunt încercate. Se pot face de asemenea și încercări pe produse finite (sârme, cabluri).

Încercările se realizează pe mașini de încercat specializate, care înregistrează, sub forma unor diagrame, variația forței funcție de deformația

epruvetei, până la ruperea acesteia. Mărimea forțelor se citește pe dispozitivul de înregistrare cu care este echipată mașina de încercat (cadranul mașinii), iar deformațiile se măsoară pe o scală gradată în [mm] sau, mai precis, cu ajutorul unor dispozitive speciale numite *extensometre*, montate pe epruvetă.

Pe mașina universală de încercat se pot efectua încercările de bază la ***tracțiune*** sau ***compresiune***. Încercările de bază sunt standardizate, respectarea standardelor fiind obligatorie. Cu ajutorul unor dispozitive suplimentare pot fi efectuate și încercările la ***încovoiere***, ***forfecare*** și ***torsiune***. Se pot realiza de asemenea și încercări la ***solicitări compuse***.

Caracteristicile mecanice ale materialelor depind de o serie de factori, dintre care se pot menționa:

- viteza de încărcare;
- tipul epruvetei;
- temperatura de încercare.

Observații:

Cele mai utilizate sunt încercările statice (forța crește relativ lent pe parcursul unei asemenea încercări, care durează câteva minute), la temperatura mediului.

În cazul pieselor utilizate în condiții deosebite (temperaturi ridicate sau coborâte, încărcări prin șoc sau variabile, radiații, etc.), sunt necesare încercări ale epruvetelor sau chiar ale pieselor în condiții cât mai apropiate de cele întâlnite în exploatare.

3.1.2. Tipuri de epruvete

Forma epruvetei trebuie să fie astfel aleasă, încât tensiunile să fie cât mai uniforme în secțiunea acesteia. Forma și dimensiunile epruvetei depind de:

- natura materialului;

- tipul semifabricatului din care se prelevează epruveta;
- încercarea la care este supusă aceasta.

Pentru **încercarea la tracțiune** se utilizează epruvete tip “halteră” care reprezintă o porțiune centrală calibrată (pe această porțiune se trasează repere fine pentru măsurarea deformațiilor) și două capete cu secțiunea mărită, destinate prinderii în fălcile mașinii. Pentru o mai bună prindere uneori se utilizează epruvete cu capete filetate.

Epruvetele pot fi:

- cilindrice, cu secțiune circulară (figura 3.1a);
- plate, cu secțiune dreptunghiulară (figura 3.1b), atunci când sunt prelevate din table.

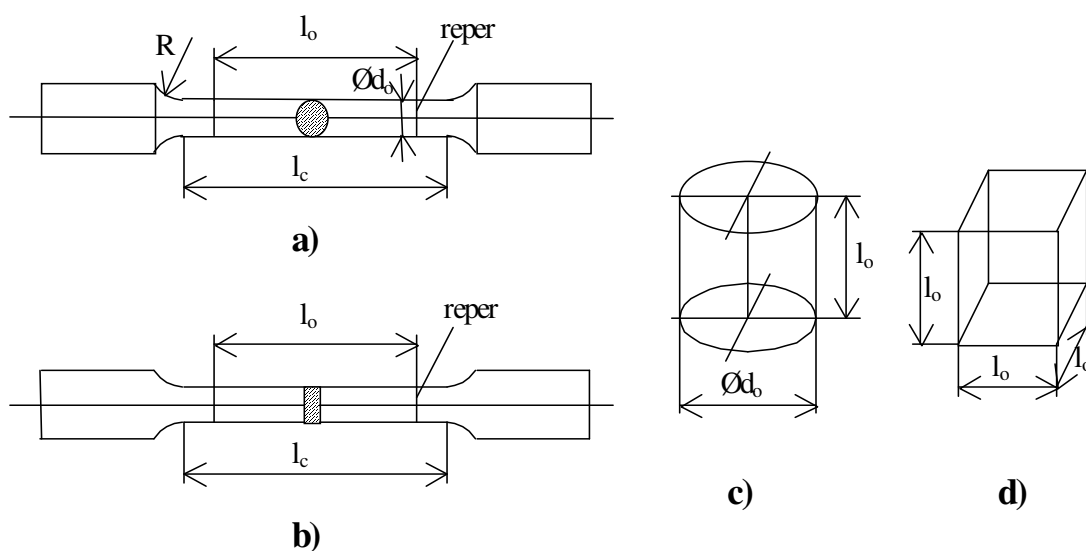


Figura 3.1

Observații:

Se utilizează în special două tipuri de epruvete:

- normale la care: $l_0 = 5 d_0$;
- lungi pentru care: $l_0 = 10 d_0$.

Uzual se alege $d_0 = 10 \text{ mm}$.

Încercarea la tracțiune a sârmelor se realizează pe produsul finit.

Încercarea la compresiune se efectuează în special pe materiale cu rupere fragilă. Pentru această încercare se utilizează epruvete scurte, având forma cilindrică sau cubică (*figurile 3.1c și 3.1 d*).

3.1.3. Încercarea la tracțiune

Încercarea la tracțiune este o încercare de bază standardizată conform standardului românesc SR EN 10002-1/95. Pentru realizarea încercării epruveta este prinsă în fălcile mașinii și este încărcată cu o forță care crește continuu, până la ruperea epruvetei. Forțele sunt aplicate în centrul de greutate al secțiunii transversale, deci este o sollicitare de *tracțiune centrică*. În timpul încercării una dintre fălci este fixă, iar cealaltă se deplasează (viteza de deplasare putând fi reglabilă la unele mașini).

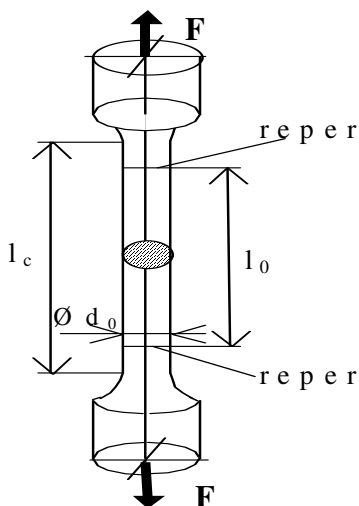


Figura 3.2

Pentru materiale metalice ductile se constată apariția unei gătuiri locale a epruvetei, cu puțin înaintea ruperii acesteia (*figura 3.3*). Ruperea se va produce în această zonă.

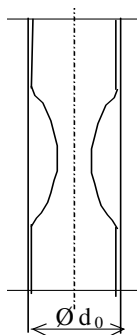


Figura 3.3

În cazul materialelor cu rupere fragilă nu se produce gătuirea și de aceea se utilizează epruvete cu o secțiune slăbită (secțiune predeterminată la rupere).

Parametrii care intervin într-o încercare la tracțiune a unei epruvete cu secțiunea circulară sau dreptunghiulară sunt:

- forța de întindere F ;
- aria A a secțiunii transversale;
- lungimea l_0 precizată între cele două repere marcate pe epruvetă;
- modificările acestei lungimi în cursul solicitării Δl ;
- natura materialului din care este confecționată epruveta.

Încercând până la rupere o epruvetă și înregistrând grafic variația forței funcție de deplasarea fălcii mașinii (sau mai bine funcție de creșterea lungimii dintre repere măsurată cu un extensometru) se obține *diagrama forță-deplasare*. Aceasta prezintă dezavantajul că pentru un material dat depinde în mare măsură de dimensiunile epruvetei (forțele depind de secțiunea inițială a epruvetei, iar alungirile de lungimea inițială dintre repere).

Dacă se admit următoarele ipoteze:

- tensiunea normală este uniform distribuită pe secțiunea epruvetei pe toată durata încercării,
- lungirea specifică este constantă pe distanța cuprinsă între repere pe toată durata încercării,

- secțiunea transversală nu variază semnificativ pe durata încercării,
este posibilă obținerea unei diagrame care să nu depindă de dimensiunile epruvetei și să fie o **diagramă caracteristică a materialului** din care este confecționată epruveta. Este vorba de **diagrama în coordonate $\sigma - \varepsilon$** . Pentru trasarea acestei diagrame se păstrează dimensiunile epruvetelor într-un interval rezonabil, indicat în standard.

Valorile tensiunilor normale și a alungirilor specifice se calculează cu relațiile:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F}{A_0} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}\end{aligned}\tag{3.1}$$

unde: F – forța care solicită epruveta la diferite intervale de timp;

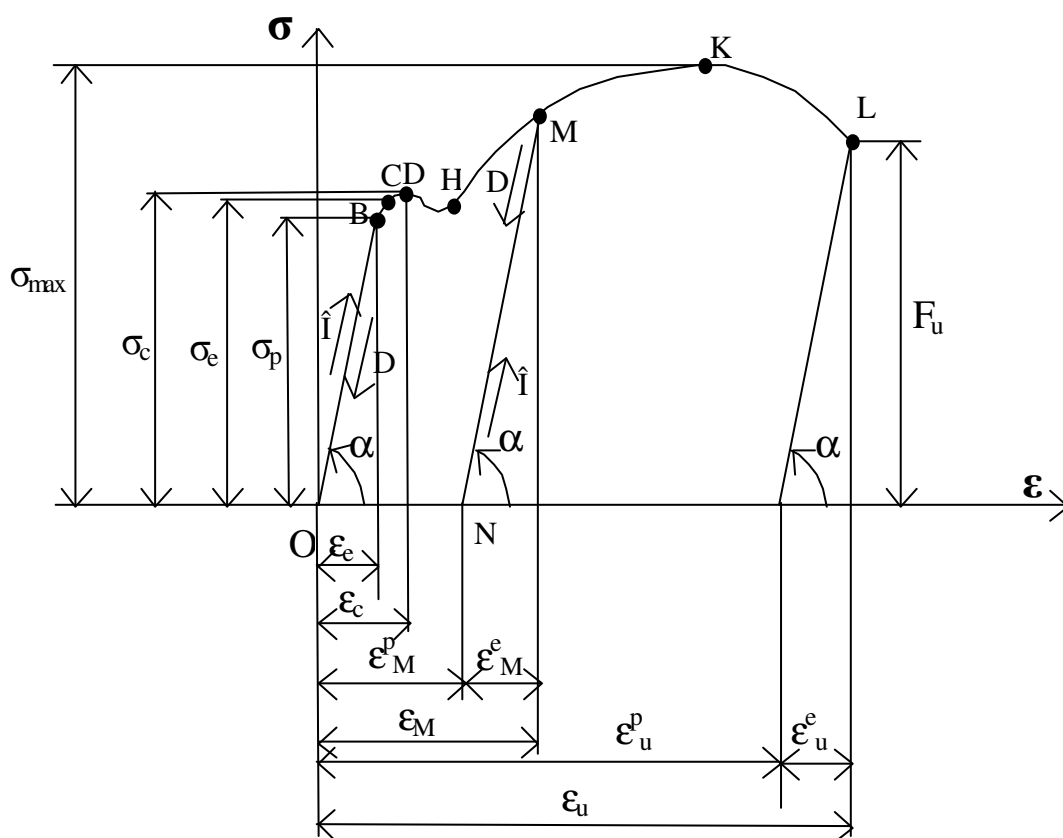
A_0 – secțiunea inițială a epruvetei;

l_0 – lungimea inițială între repere;

l – lungimea între repere la diferite intervale de timp.

Cu aceste valori se construiește **diagrama caracteristică a materialului**. Pentru un **oțel cu rupere tenace** această diagramă este prezentată în *figura 3.4*. Pe diagramă se disting următoarele regiuni și puncte caracteristice.

Prima parte a curbei, **OB**, este o dreaptă care indică o proporționalitate între tensiuni și deformații (este **zona de proporționalitate** a curbei caracteristice). Ea corespunde domeniului de proporționalitate a materialului, delimitat superior prin **limita de proporționalitate σ_p** , reprezentând tensiunea corespunzătoare punctului **B**.



Î = încărcare, D = descărcare

Figura 3.4

De la punctul **B** la **C**, curba se îndepărtează de linia dreaptă și deci nu mai există proporționalitate între tensiunile normale și alungirile specifice produse. Pe această porțiune alungirile încep să crească într-o măsură mai mare. **O-C** este **zona de elasticitate**, în care materialul rămâne elastic (după descărcare epruveta revine la dimensiunile și forma inițială). După depășirea zonei de elasticitate, epruveta rămâne cu deformații permanente (plastice) după descărcare. Tensiunea corespunzătoare punctului **C** reprezintă **limita de elasticitate** a materialului și este notată cu σ_e .

Zona de curgere reprezintă porțiunea pe care forța se menține aproximativ constantă și crește mult deformația. Punctului **D** îi corespunde **limita de curgere** σ_c . După atingerea limitei de curgere curba caracteristică are un traseu practic

orizontal $D-H$, numit *palier de curgere* (uneori acest palier poate avea un aspect zimțat sau vălurit, în special la solicitarea epruvetei cu viteze mici de încărcare). În zona de curgere apare fenomenul de *ecruisare* (orientări ale cristalelor pe direcția de solicitare și apoi alungirea acestora). La suprafața epruvetei lustruite apar mici adâncituri, astfel aranjate încât formează o rețea de “linii” ortogonale, orientate la 45° față de direcția forței (liniile Lüders). O serie de materiale, în special cele cu rupere fragilă, nu prezintă o zonă de curgere bine evidențiată.

Dacă se descarcă epruveta după depășirea limitei de elasticitate (de exemplu în punctul M) se constată că descărcarea se produce după o dreaptă paralelă cu cea dusă prin origine (determinată de punctele $O - B$). Dacă epruveta astfel descărcată este solicitată din nou la tracțiune, curba sa caracteristică începe cu dreapta NM după care parcurge aceeași curbă până la rupere. În urma încercării la tracțiune peste limita de elasticitate și apoi descărcare, se constată că se mărește limita de elasticitate. Deformația ϵ_M înregistrată în M este suma dintre componenta elastică ϵ'_M (care dispare la descărcarea epruvetei) și componenta plastică ϵ''_M , care rămâne după descărcare.

După depășirea limitei de curgere, curba caracteristică prezintă un traseu ascendent $M-K$ numit *zonă de consolidare* în care forța crește în continuare, ca urmare a ecruisării materialului, până în dreptul ordonatei punctului K unde se înregistrează tensiunea maximă σ_{max} care este definită ca *rezistență de rupere* a materialului.

După atingerea valorii maxime a sarcinii apare gătuirea epruvetei, care se dezvoltă din ce în ce mai mult până când se produce ruperea. Porțiunea $K-L$ din curba caracteristică, în care forța scade ca urmare a micșorării secțiunii epruvetei (după apariția zonei de stricționare) reprezintă *zona de cedare*. De la K la L tensiunea scade în timp ce deformația continuă să crească și în punctul L epruveta se rupe. Acestui punct îi corespunde o deformație finală (ultimă) ϵ_u , a cărei componentă elastică ϵ'_u dispare după ruperea epruvetei.

Pe baza curbei caracteristice pot fi calculate cu ușurință următoarele *caracteristicile convenționale*:

- *tensiunea și lungirea specifică de proporționalitate*:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_o}; \quad \varepsilon_p = \frac{\delta_p}{l_o} \quad 100\% \quad (3.2)$$

- *tensiunea și lungirea specifică la limita de elasticitate*:

$$\sigma_e = \frac{F_e}{A_o}; \quad \varepsilon_e = \frac{\delta_e}{l_o} \quad 100\% \quad (3.3)$$

- *tensiunea și lungirea specifică de curgere*:

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_o}; \quad \varepsilon_c = \frac{\delta_c}{l_o} \quad 100\% \quad (3.4)$$

- *tensiunea și lungirea specifică de rupere*:

$$\sigma_r = \sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A_o}; \quad \varepsilon_r = \frac{\delta_u^p}{l_o} \quad 100\% \quad (3.5)$$

unde: A_o - secțiunea inițială a epruvetei cilindrice;

$\delta_u^p = \Delta l$ - lungirea la rupere;

l_o - lungimea inițială între repere;

l_u - lungimea ultimă (finală) care se măsoară între repere, după alăturarea celor două părți ale epruvetei rupte (*figura 3.5*).

$$A_o = \frac{\pi d_o^2}{4} \quad (3.6)$$

$$\delta_u^p = \Delta l = l_u - l_o \quad (3.7)$$

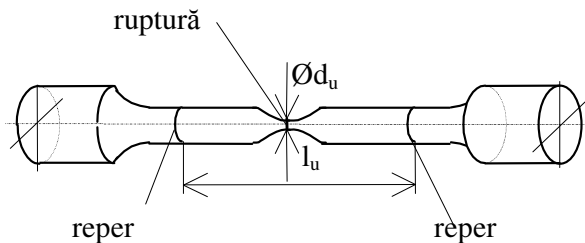


Figura 3.5

Se mai poate calcula *coeficientul de gătuire* la rupere:

$$Z = \frac{A_o - A_u}{A_o} \cdot 100\% \quad (3.8)$$

unde:

$$A_u = \frac{\pi d_u^2}{4} \quad (3.9)$$

d_u - diametrul cel mai mic din zona gătuită (*figura 3.5*).

Tensiunile σ_e , σ_p , σ_s , σ_r reprezintă caracteristicile mecanice ale materialului.

Pentru oțeluri, lungirile specifice au valori foarte mici, în special în prima porțiune a diagramei: $\epsilon_p \approx 0,002\%$; $\epsilon_e \approx 0,02\%$; $\epsilon_c \approx 0,2\%$. La rupere însă lungirea specifică poate avea valori de $\epsilon_r \geq 20\%$ pentru oțeluri cu rupere ductilă și de $\epsilon_r \geq 7\div 10\%$ pentru oțeluri cu rupere fragilă (cu un conținut ridicat de carbon). De asemenea cu cât materialul este mai ductil, cu atât ϵ_r și Z au valori mai mari. Din categoria materialelor cu rupere ductilă mai fac parte Cu, Al, Sn, Pb, etc., iar din categoria materialelor cu rupere fragilă fonta, oțelurile de scule, betonul, rocile, sticla, unele materiale compozite, etc. La unele materiale cu rupere fragilă ϵ_r nu depășește 1% și practic nu se înregistrează o gătuire a epruvetei înaintea ruperii.

Curba caracteristică din *figura 3.4* este *convențională* deoarece la determinarea tensiunii normale forța de întindere se împarte la aria inițială a secțiunii epruvetei ca și cum aceasta ar rămâne constantă. Din acest motiv curba caracteristică are traseul nefiresc *K-L* care arată că ruperea ar avea loc în *L* la un efort mai mic decât cel corespunzător punctului *K*. Măsurând diametrul epruvetei pe toată durata încercării și calculând tensiunea σ ca raportul dintre forță și secțiunea la un moment dat (ținând cont de stricțiuni) se poate trasa *diagrama reală*, prezentată cu linie întreruptă în *figura 3.6*. În această diagramă tensiunea este maximă la ruperea epruvetei și se calculează cu relația:

$$\sigma_{\max}^r = \frac{F_u}{A_u} \quad (3.10)$$

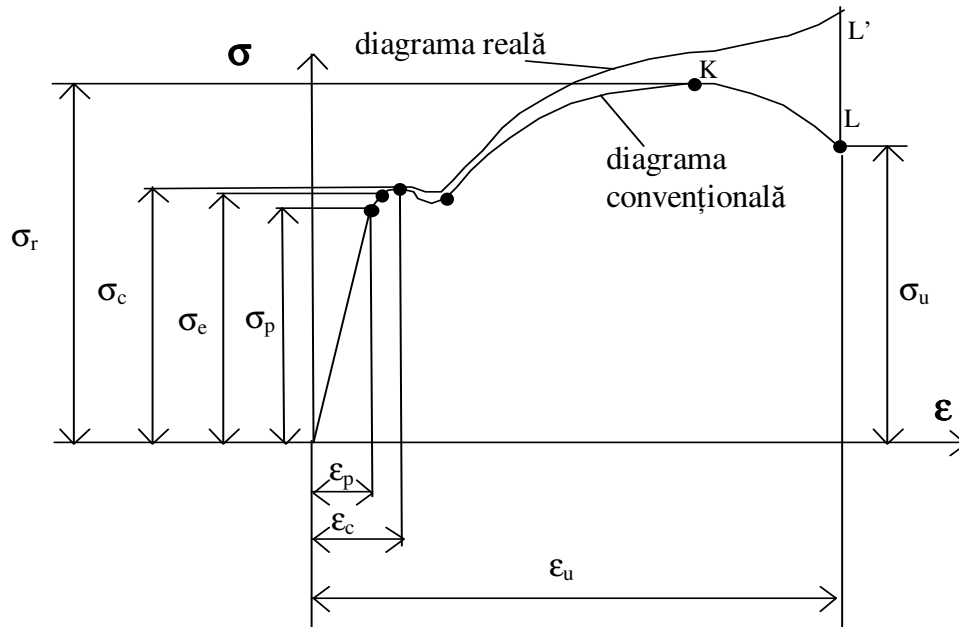


Figura 3.6

Se observă că cele două diagrame practic coincid în prima porțiune (până la apariția curgerii). Diferențe mari apar între ele abia după gătuirea epruvetei.

În *regiunea de proporționalitate O-B* curba caracteristică este liniară. Panta acestei drepte se notează cu E și se numește **modul de elasticitate longitudinală** (modulul Young):

$$\operatorname{tg} \alpha = E \quad (3.11)$$

Pe această porțiune a curbei caracteristice este valabilă **legea lui Hooke**, care este de fapt ecuația drepte care trece prin origine:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.12)$$

Această lege a fost enunțată în anul 1678 de către Robert Hooke și arată că *până la limita de proporționalitate alungirile specifice sunt proporționale cu tensiunile*.

Modulul de elasticitate longitudinală mai putea fi numit “rigiditatea materialului” și este o caracteristică de material. Cu cât E are valori mai mari, cu atât deformațiile epruvetei sunt mai mici, la aceeași tensiune. Pentru oțeluri modulul are valori extrem de ridicate: $E_{OL} \approx 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Comparativ, aluminiu are un modul de elasticitate mult mai mic: $E_{al} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Observații:

Ipotezele pe baza cărora a fost trasată diagrama convențională $\sigma - \varepsilon$ sunt foarte aproape de realitate în prima parte a încercării (până la apariția curgerii), dar sunt nesatisfăcătoare în ultima perioadă, în special după apariția găturii. Acest fenomen este asociat cu o repartiție neuniformă a lungirii specifice, o scădere locală pronunțată a secțiunii și cu apariția unei stări spațiale de tensiuni neuniforme în zona stricționată. Datorită acestor fenomene complexe, este extrem de dificil să se calculeze o valoare locală a tensiunii σ_x și a lungirii specifice ε_x .

Se mai obișnuiește ca, pentru solicitările axiale, tensiunile să se noteze cu R (rezistență), iar alungirile specifice cu A_t (alungirea totală după rupere). Vom avea astfel $\sigma_c = R_e$ și $\sigma_r = R_m$ (rezistența maximă la tracțiune), etc.

În aplicațiile ingineresti materialul se folosește numai în zona de elasticitate și din acest motiv nu prezintă interes trasarea curbei reale și se preferă cea convențională. Prin urmare rezistența de rupere este o mărime convențională care diferă de tensiunea maximă atinsă în corpul solid.

Modulul de elasticitate se determină numai pe epruvete lungi, cu ajutorul extensometrelor.

Legea lui Hooke enunță legea de proporționalitate între tensiuni și deformații și stă la baza tuturor calculelor de rezistență.

Suprafața cuprinsă între curbă și axa absciselor reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru distrugerea epruvetei raportat la volumul acesteia (lucrul mecanic specific).

Pentru materiale care nu prezintă în curba caracteristică palierul de curgere se determină în mod *convențional* o limită de curgere tehnică ca fiind valoarea tensiunii normale căreia îi corespunde după descărcarea epruvetei o lungirea specifică remanentă de 0,2% înregistrată la oțelurile cu rupere ductilă. Punctul în care o paralelă la dreapta ce trece prin origine intersectează diagrama determină tensiunea $\sigma_{0,2}$ (figura 3.7). Aceasta se consideră convențional ca fiind tensiunea (limita) de curgere $\sigma_c = \sigma_{0,2}$ numită și *limită de curgere off set*. În standard această limită de curgere convențională se notează R_{02} .

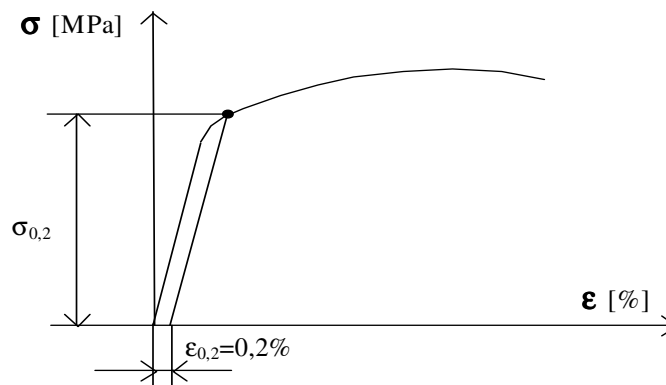
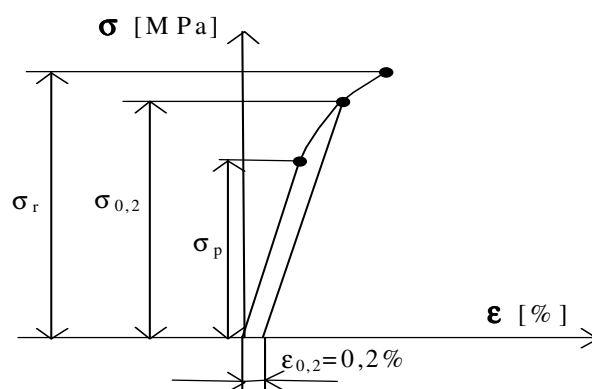


Figura 3.7

În figura 3.8 se prezintă diagrama caracteristică pentru un oțel cu conținut ridicat de carbon, care face parte din categoria materialelor cu rupere fragilă care au deformații mici la rupere și nu prezintă gătuire. Se observă că diagrama este liniară până aproape de rupere și nu prezintă palier de curgere.



Există și materiale care *nu ascultă de legea lui Hooke* (de exemplu fonta, alama, cupru, betonul, cauciucul, pielea, fibrele textile, materialele plastice, fibrele artificiale, etc.) la care diagrama caracteristică nu prezintă practic o porțiune liniară. În acest caz, modulul de elasticitate E variază pe toată durata încercării. Se poate defini convențional un modul de elasticitate față de o coardă (dreapta OD în figura 3.9), numit *modul de elasticitate secant*.

Mai poate fi definit un *modul de elasticitate inițial*, care reprezintă panta tangentei prin origine (dreapta **OB** în *figura 3.9*) sau un *modul tangent* pentru un punct oarecare al diagramei (panta tangentei **CC'** în *figura 3.9*):

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (3.14)$$

Pentru asemenea materiale se poate căuta o expresie analitică a curbei de forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_{med}} \quad (3.15)$$

unde: n - un coeficient ($n > 1$ pentru curbe cu concavitatea în jos și $n < 1$ la curbe cu concavitatea în sus);

E_{med} - o valoare medie a modului de elasticitate.

Relația (3.15) ar putea înlocui legea lui Hooke, dar aceasta complică mult calculele de rezistență. Pentru reducerea volumului de calcul curba poate fi înlocuită cu o dreaptă convențională.

3.1.4. Solicitarea la compresie

Încercarea la compresie se efectuează pe epruvete scurte ($l_0 \leq 5 \cdot d_0$) pentru a evita fenomenul de flambaj. Numai epruvetele executate din *materiale fragile* pot fi rupte la compresie. Cele executate *din materiale cu rupere tenace* pot suporta deformații mari, fără să se ajungă la distrugerea acestora. Epruvetele executate din materiale tenace se deformează în formă de butoi în cursul încercărilor, datorită frecărilor care apar între capetele epruvetei și platanele între care are loc compresie.

În *figura 3.10* se prezintă diagrama caracteristică a unei epruvete din fontă.

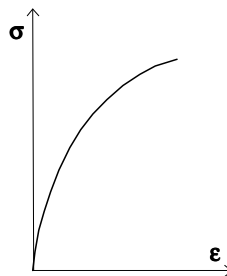


Figura 3.10

Pentru multe materiale cu rupere ductilă modulul de elasticitate longitudinală și limita de curgere sunt aproximativ aceleași pentru tracțiune și compresiune (*figura 3.11*). Ruperea în acest caz nu poate fi atinsă.

În cazul materialelor cu rupere fragilă, diagrama la tracțiune diferă mult de diagrama de compresiune (materialele au modulul de elasticitate la tracțiune diferit de cel obținut la compresiune). Tensiunea de rupere la tracțiune este mult mai mică decât cea de rupere la compresiune, de exemplu $\sigma_{rt} \approx 0,1\sigma_{rc}$ pentru beton (*figura 3.12*).

În *figurile 3.11* și *3.12* diagrama la compresiune s-a prezentat în cadranul III, deoarece σ și ε sunt considerate negative pentru această sollicitare.

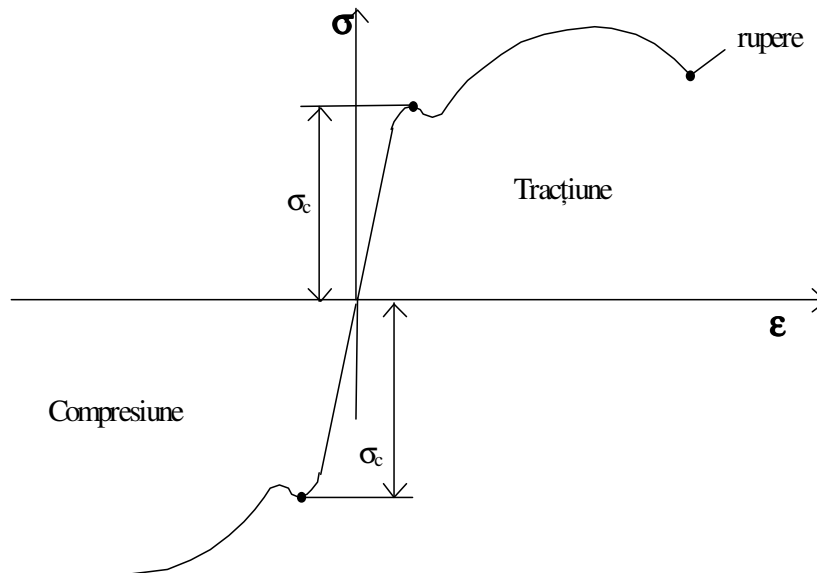


Figura 3.11

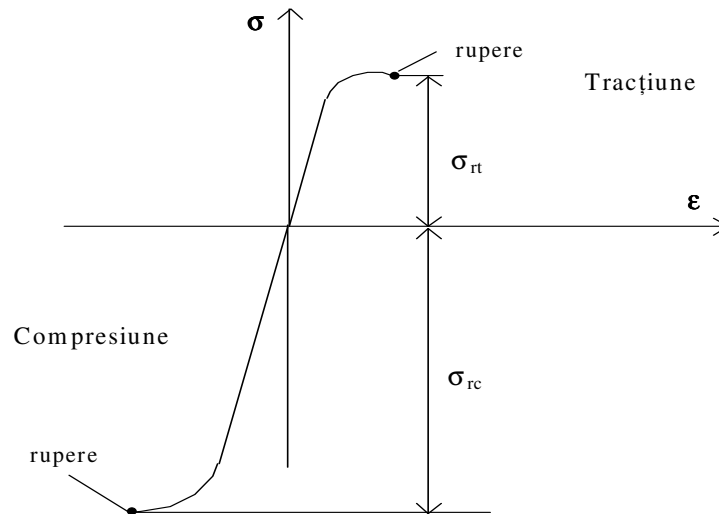


Figura 3.12

S-a menționat anterior că materialul unei epruvete din oțel cu rupere ductilă, solicitat peste limita de curgere și apoi descărcat complet își mărește limita de elasticitate și proporționalitate. Dacă apoi epruveta este solicitată la compresiune, se constată scăderea limitei de curgere. Acest fenomen se numește *efectul Bauschinger*.

El apare și la alte solicitări (torsiune, încovoiere) și poate fi utilizat pentru mărirea zonei de proporționalitate când sarcinile nu își schimbă sensul în timpul funcționării (la arcuri de tracțiune sau de compresiune, etc.). După un tratament termic de recoacere, tensiunile de curgere la tracțiune și compresiune vor fi iarăși egale.

3.1.5. Solicitarea la forfecare

Solicitarea la forfecare este efectuată pe epruvete *Iosipescu* (epruvete plate, cu secțiune predeterminată de rupere în care există o solicitare la forfecare pură) (*figura 3.13*). Adâncimea celor două creștături (d_2) este astfel aleasă, încât tensiunea tangențială să fie cât mai uniformă în secțiunea slăbită.

Încercările se realizează pe o mașină universală de încercat, care poate lucra la tracțiune sau la compresiune. Epruvetele sunt prinse într-un dispozitiv special montat pe mașină. Între forțe există relația: $F_1 = \frac{FL}{b}$.

Se trasează inițial diagrama forță - deplasare a fălcii mobile și apoi prin calcul **diagrama convențională τ - γ** . Pentru materiale cu rupere ductilă ea are o alură similară cu cea de la torsiune (figura 3.14).

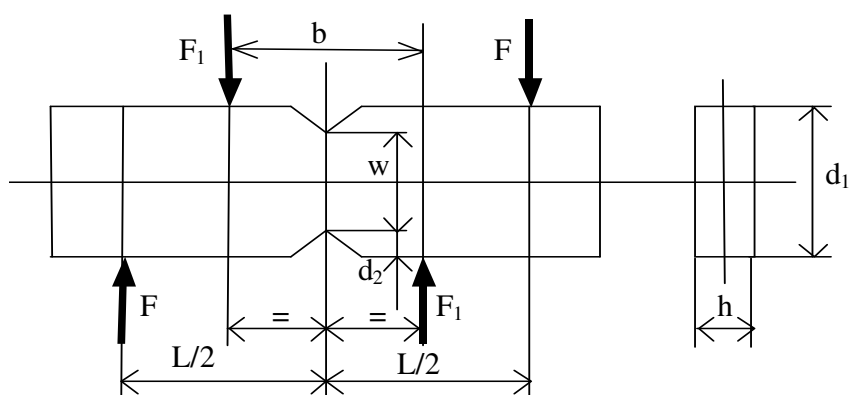


Figura 3.13

3.1.6 Solicitarea la torsiune

Această solicitare nu este standardizată și este mai puțin utilizată datorită dezavantajelor pe care la prezintă:

- starea de tensiuni nu mai este uniformă în secțiunea epruvetei (tensiunile au o distribuție liniară). O distribuție mai uniformă a tensiunilor se poate obține prin utilizarea unor epruvete tubulare, a căror execuție este însă dificilă și a căror preț este ridicat;

- pentru realizarea încercării sunt necesare mașini și respectiv dispozitive speciale care nu fac parte din dotarea standard a mașinilor universale de încercat.

Încercarea la torsiune prezintă și o serie de avantaje dintre care se menționează:

- starea particulară de tensiune care apare în epruvetă;

- prinderea mai ușoară a epruvetei;
- evitarea lunecărilor în bacuri,
- lipsa fenomenului de gătuire înainte de rupere.

În timpul încercării se înregistrează diagrama $M_t - \varphi$. (moment de torsiune - unghi de rotire a secțiunii). Se trasează apoi prin calcul **diagrama caracteristică convențională $\tau - \gamma$** . Se obține o **curbă $\tau = f(\gamma)$** asemănătoare cu cea de la tracțiune.

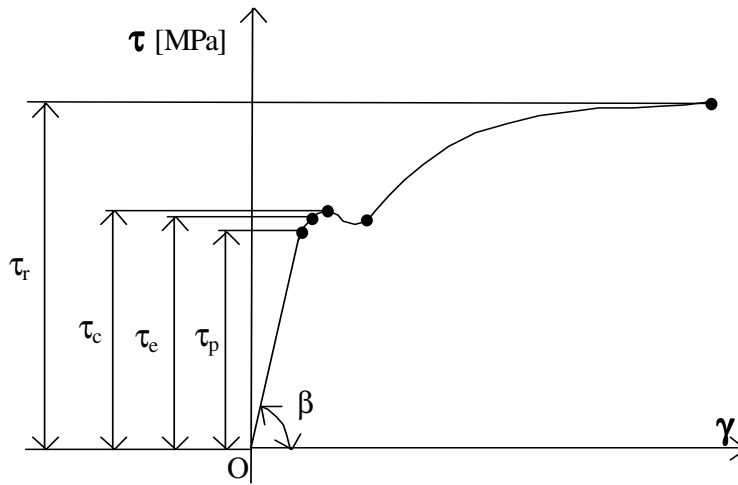


Figura 3.14

Pe această curbă caracteristică se pot defini **caracteristicile mecanice la torsiune**:

- limita de proporționalitate τ_p ,
- limita de elasticitate τ_e ,
- limita de curgere τ_c ,
- rezistența de rupere τ_r (figura 3.14).

Panta dreptei prin origine reprezintă **modulul de elasticitate transversală (Coulomb), G** :

$$\operatorname{tg} \beta = G \quad (3.16)$$

Panta acestei drepte este mai mică.

Cele două module de elasticitate E , G și coeficientul lui Poisson ν caracterizează comportarea elastică a unui material și se numesc caracteristici elastice.

Observații:

Un material care are aceleași caracteristici elastice în orice direcție se numește izotrop.

La materialele anizotrope, valoarea caracteristicilor elastice depinde de direcția de prelevare a epruvetei. Un material complet anizotrop prezintă 21 caracteristici elastice independente.

Materialele ortotrope prezintă trei plane de simetrie ortogonale pentru caracteristicile elastice și au 9 caracteristici elastice independente.

În tabelul 3.1 sunt indicate valori ale celor două module de elasticitate pentru câteva materiale utilizate în construcția de mașini (valori ale coeficientului de contracție transversală se prezintă în tabelul 2.3).

Tabelul 3.1

Material	E [MPa] $\times 10^5$	G [MPa] $\times 10^4$
Cauciuc	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-3}$
Pb	0,17	0,7
Cu, Mg, Bronz	0,5-1,2	$\sim 3-4$
Al	$\sim 0,7$	2,5-2,7
Oțel carbon	1,9...2,2	7,8-8,2
Fontă cenușie	0,8-1,2	2,9-4
Fontă maleabilă	1,5	—
Beton	0,15-0,4	0,7-1,7

În Teoria Elasticității se arată că pentru un material *izotrop*, între cele trei caracteristici elastice există următoarea relația (prin urmare materialul izotrop prezintă numai două caracteristici elastice independente):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.17)$$

Pentru torsiune și forfecare ecuația drepte care trece prin origine are următoarea formă și este cunoscută ca fiind legea lui Hooke:

$$\tau = G \gamma \quad (3.18)$$

3.1.7 Încercarea la încovoiere simplă

Încercarea la încovoiere se aplică în special pentru materiale cu rupere fragilă, deoarece în cazul celor cu rupere tenace nu se produce ruperea. Tensiunile normale care apar în urma solicitării prezintă o variație liniară pe secțiune, astfel că fibrele de la exteriorul curburii sunt supuse la tracțiune, iar cele de la interior la compresiune. Din aceste motive, încercarea la încovoiere este mai puțin utilizată. În schimb încercarea este ușor de realizat pe orice mașină de încercat universală.

3.1.8 Încercări tehnologice

Spre deosebire de încercările prezentate anterior încercările tehnologice nu pot fi folosite pentru determinarea caracteristicilor mecanice sau elastice ale materialelor. Încercări tehnologice au drept scop determinarea prelucrabilității materialelor prin diverse tehnologii: prelucrări prin așchiere, deformări plastice la rece, etc. Sunt prezentate în continuare câteva dintre încercările tehnologice.

3.1.8.1 Determinarea durtății

Determinarea durtății se poate realiza utilizând următoarele metode: Brinell, Rockwell și Vickers pentru materiale metalice și Shore pentru polimeri,

cauciuc, etc. Indiferent de metoda folosită determinarea industrială a durității se bazează în special pe metode de penetrare.

Metoda Brinell

Această metodă utilizează drept penetrator o bilă din oțel foarte dur de diametru D . În urma apăsării bilei cu o forță F , pe suprafața polizată a probei sau piesei, rămâne o amprentă sub forma unei calote sferice de diametru d . Sunt standardizate D , F și durata menținerii forței.

Duritatea Brinell se exprimă ca raport dintre forța F [daN] și suprafața S [mm²] a calotei sferice:

$$HB = \frac{F}{S} \quad (3.19)$$

Observatii:

Cunoscând duritatea Brinell, se poate aprecia rezistența de rupere a oțelului cu relația empirică: $\sigma_r \approx 0,35 HB [daN/mm^2]$

Determinarea durității Brinell poate fi privită și ca o metodă nedistructivă pentru aprecierea tensiunii de rupere.

Luând duritatea în mai multe puncte se poate verifica omogenitatea tratamentului termic al materialului.

Metoda Rockwell

Această metodă utilizează ca penetrator:

- o bilă de oțel extradur cu $D = 1/16$ inch și $F = 100$ daN (duritatea HRB);
- un con de diamant cu unghiul la vârf de 120° și $F = 150$ daN (duritatea HRC).

Metoda Vickers

Metoda utilizează ca penetrator o piramidă de diamant cu baza pătrată ($\alpha = 136^\circ$). Forța de apăsare este cuprinsă între 5 - 80 daN. Pentru determinarea

durității se măsoară diagonala amprentei lăsată de penetrator pe suprafața probei sau a piesei.

Metoda Shore

La această metodă penetratorul este de diamant și este montat pe o greutate care cade de la o înălțime dată pe suprafața probei.

3.1.8.2 Determinarea rezilienței

Se utilizează epruvete cu o secțiune predeterminată de rupere, lovite de către un pendul de formă specială și se realizează o încercare la încovoiere prin șoc.

Metoda Charpy

La această metodă epruveta este montată orizontal, simplu rezemată la capete și este lovită de către pendul, în spatele creștăturii (*figura 3.15*).

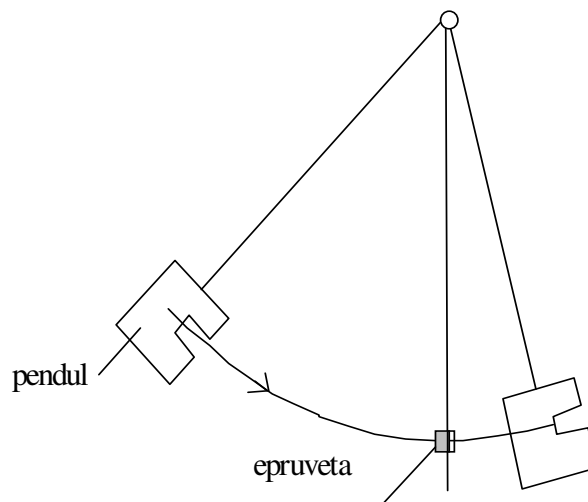


Figura 3.15

Se determină energia U_d consumată pentru distrugerea epruvetei și se determină **reziliența K** cu relația:

$$K = \frac{U_d}{A} \quad (3.20)$$

unde: A - aria secțiunii slăbite a epruvetei.

Metoda Izod

La această metodă epruveta este montată în poziție verticală, în consolă (fixată la un capăt și liberă la celălalt) și este lovită de către pendul la capătul liber, dinspre partea creștăturii.

Observații:

Reziliența se exprimă de obicei în (J/cm²).

Inversul rezilienței (1/K) se numește fragilitate.

De regulă, fragilitatea unui material crește cu duritatea.

3.1.9. Factori care influențează caracteristicile mecanice și elastice ale materialelor

Caracteristicile mecanice și elastice pentru un material dat, pot fi modificate, în mod *real* sau *aparent*, de către anumiți factori.

În mod *aparent*, aceste caracteristici pot fi modificate de:

- viteza de încărcare a epruvetei;
- dimensiunile epruvetei;
- tehnologia de elaborare a materialului și de confecționarea epruvetei.

Modificarea *reală* a caracteristicilor mecanice și elastice este produsă de:

- temperatură;
- timp;
- ecruisare;
- tratamente termice.

Influența vitezei de încărcare

Pentru determinarea caracteristicilor mecanice uzuale se recomandă viteze de încărcare relativ mici (*încărcare statică*). Cu cât sarcina se aplică mai încet cu atât tensiunea este mai mică, iar alungirea crește și invers. La multe materiale, caracteristicile mecanice cresc la viteze mari de încărcare. În acest caz deformațiile plastice nu se pot dezvolta datorită timpului scurt în care se face încărcarea și rezultă deformații specifice la rupere mai mici și rezistențe de rupere mai ridicate. Se consideră că această *creștere* este doar *aparentă* deoarece încărcarea prin șoc nu este recomandabilă. La unele materiale cu rupere foarte fragilă (de exemplu materialele ceramice) se constată o scădere a caracteristicilor mecanice cu creșterea vitezei de încărcare. De asemenea se poate întâmpla ca un material care prezintă o rupere tenace la sollicitări statice să poate deveni fragil la viteze mari de încărcare.

Influența dimensiunilor epruvetei

Dimensiunile epruvetei influențează într-o anumită măsură tensiunea de rupere la tracțiune, astfel că pentru același material se obțin valori mai mici pentru σ_r la încercarea unor epruvete de dimensiuni mai mari. Acest fenomen poate fi explicat prin faptul că ruperea materialului este amorată de către microdefecte (defecțiuni locale ale rețelei cristaline, incluziuni, microsufuri, etc.) ale materialului, de la care pornesc microfisuri și apoi fisuri care conduc la secționarea epruvetei. Cu creșterea volumului de material crește și numărul microdefectelor și deci probabilitatea apariției unor microdefecte importante care vor amorsa microfisurile la tensiuni mai mici.

Influența dimensiunilor poate fi evaluată prin coeficientul de scară:

$$K_d = \frac{\sigma_{r,d}}{\sigma_{r,10}} \quad (3.21)$$

unde: $\sigma_{r,10}$ - tensiunea de rupere la tracțiune, determinată pe epruvete standard, cu diametrul de 10 mm;

$\sigma_{r,d}$ - tensiunea de rupere la tracțiune, determinată pe epruvete proporționale cu cele utilizate la determinarea tensiunii $\sigma_{r,10}$, având diametrul părții calibrate $d \neq 10$ mm.

Observații:

Dimensiunile epruvetelor au o influență relativ mică la oțeluri.

Tensiunea la rupere determinată pe sârme foarte subțiri are valori mult mai mari decât cea determinată pe epruvete normale, confecționate din același material.

Dimensiunea epruvetei are o influență foarte mare la fonte, care sunt materiale cu mai multe microdefecte.

Influența tehnologiei de elaborare a materialului și de confecționarea epruvetei

La elaborarea unui material, compoziția chimică și parametrii tehnologici prezintă anumite variații, care trebuie să fie cât mai mici posibil, pentru a putea garanta caracteristicile mecanice și elastice ale materialului. Totuși, anumite variații sunt inevitabile și pot conduce la o dispersie mai mică (la materiale omogene) sau la o dispersie mai mare (la materiale mai puțin omogene și în special la cele neomogene) a caracteristicilor elastice și mecanice.

Tehnologia de elaborare a materialului poate influența semnificativ caracteristicile elastice și mecanice ale materialului. Astfel, același oțel are tensiunea la rupere mai ridicată dacă este forjat, mai scăzută dacă este laminat și mai scăzută dacă este turnat (oțelul turnat este mai puțin omogen și are defecte mai numeroase și mai mari), iar polimerii au tensiunea de rupere și densitatea mai mare dacă sunt turnați sub presiune decât dacă sunt turnați liber.

În cazul materialelor anizotrope (materiale metalice ecruisate, unii polimeri, lemnul, betonul armat, materialele compozite armate cu fibre lungi, etc.) caracteristicile elastice și mecanice depind de direcția de prelevare a epruvetei.

Influența temperaturii

Temperatura la care se înregistrează curbele caracteristice corespunde unor valori curente din timpul exploatării și este de circa 20°C. Experiența arată că variația de temperatură influențează în mare măsură caracteristicile elastice și mecanice ale materialelor. Cu toate că în aplicațiile ingineresti există mașini și structuri care lucrează la temperaturi mult diferite de cea a mediului (temperaturi extrem de ridicate sau coborâte) analiza comportării materialelor funcție de temperatură este complexă și dificilă.

La oțelurile carbon rezistența la rupere prezintă un maxim, iar alungirea la rupere un minim în jurul temperaturii de 300° C. La temperaturi mai ridicate se înregistrează scăderi importante ale rezistenței și alungiri mai mari. Modulul de elasticitate scade continuu cu temperatura (deformarea plastică la cald a materialelor metalice se bazează tocmai pe scăderea tensiunii de curgere și a modulului de elasticitate la temperaturi ridicate). În schimb la temperaturi scăzute tensiunile de rupere ale oțelurilor cresc deoarece materialele trec din starea tenace în starea fragilă, în care caz deformațiile lor plastice sunt foarte mici. În această situație materialele devin sensibile la încărcări dinamice. Unele materiale metalice devin fragile la numai -20° C.

Influența timpului

În practică viteza de încărcare și durata de acțiune a sarcinilor exterioare variază în limite destul de largi, astfel că există sarcini care variază foarte încet și sarcini care variază foarte repede.

Pentru materialele perfect liniar-elastice, care au o curbă caracteristică liniară poate fi scrisă legea lui Hooke, *relația (3.12)*. În anumite condiții unele materiale au o comportare *vâsco-elastică*, adică își modifică starea de deformații și/sau tensiunii atunci când o sarcină acționează timp îndelungat. La oțeluri comportarea vâsco-elastică se manifestă pregnant la temperaturi de peste 300°C, pe când la polimeri ea se manifestă chiar și la temperatura mediului. Tensiunile

sunt funcții nu numai de alungirile specifice, dar și de timp. Un asemenea comportament se numește *neliniar vâsco-elastic*.

Sub acțiunea unor sarcini de durată, chiar la valori constante ale tensiunilor, apar deformații de natură vâsco-plastice numite *deformații de curgere lentă* sau *fluaj*. La încercările la *fluaj* se mențin constante temperatura și tensiunea σ din piesă și se înregistrează creșterea lungirii specifice ε în timp, $\varepsilon = f(t)$. Materialul prezintă o curgere lentă.

Fenomenul invers, de reducere în timp a tensiunilor la deformații constante este numit *relaxare*. Pentru acest gen de încercări se mențin constante temperatura și alungirea specifică ε și se înregistrează variația tensiunii în timp $\sigma = f(t)$.

În *figura 3.16* se prezintă curbele tipice pentru încercările la fluaj și relaxare, trasate păstrând anumiți parametri constanți (temperatură și tensiune pentru fluaj, temperatură și lungire specifică pentru relaxare).

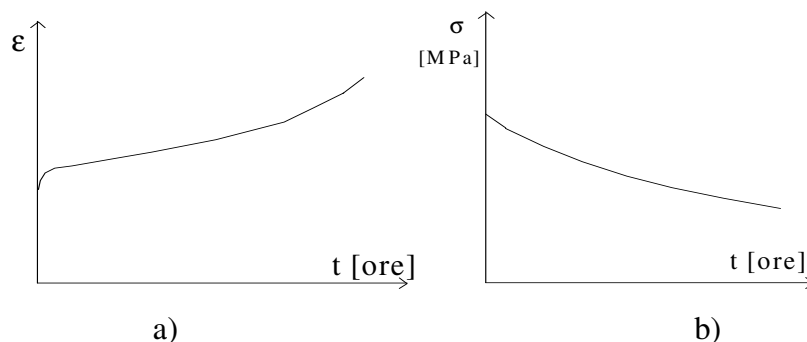


Figura 3.16

În cazul curbei de deformație sub sarcină constantă (*figura 3.16a*) se constată că alungirile cresc cu timpul, astfel că fluajul conduce la modificarea în timp a dimensiunilor paletelor de turbină, a pereților conductelor instalațiilor termoelectrice, ș.a. Pentru curba de relaxare (*figura 3.16b*) se constată că tensiunile din piesă scad cu timpul. Acest fenomen se produce în special la instalațiile termice care lucrează timp îndelungat sub sarcină (de exemplu

relaxarea tensiunilor contribuie la slăbirea unor îmbinări cu șuruburi care lucrează la temperaturi ridicate, etc.).

Observații:

Calculul de rezistență al pieselor din materiale metalice care lucrează la temperaturi ridicate se face ținând cont de fenomenele de fluaj și relaxare din ele. În cazul polimerilor acest calcul se face chiar și pentru piese care lucrează la temperatura mediului.

Influența tratamentelor termice și a ecruisării

Tratamentele termice și ecruisarea influențează în mod real caracteristicile mecanice și elastice ale materialului. Se știe ca tratamentele termice sunt utilizate în mod curent pentru a modifica în proporții destul de importante caracteristicile mecanice. Astfel:

- călirea crește duritatea, rezistența la rupere, fragilitatea și scade alungirea la rupere;
- revenirea păstrează duritatea obținută prin călire și micsorează fragilitatea;
- recoacerea de înmuiere anulează efectul călirii.

Fenomenul de ridicare a limitei de proporționalitate prin tratamente mecanice prealabile poartă numele de *ecruisaj* și este utilizat în metalurgie la obținerea oțelurilor dure. Ecruisarea conduce la creșterea semnificativă a limitei de elasticitate la descărcarea și reîncărcarea epruvetelor, la întindere, în schimb o micșorează pe cea de compresiune (are loc efectul Bauschinger). Deformările plastice (în special cele la rece) produc ecruisări. Prin laminare și trefilare se obțin semifabricate ecruisate (la suprafață sau chiar în toată masa). Pentru a ridica limita de elasticitate la unele materiale metalice ca alama, arama și aliajele de aluminiu, se aplică în mod special operația de trefilare. Un material cu rupere tenace poate deveni fragil în urma ecruisării sale. De asemenea în urma ecruisării oțelul devine anizotrop.

3.2. Ipoteze simplificatoare în Rezistența Materialelor

Pentru a putea prevedea comportarea unui material în condiții date, trebuie să avem o *modelare matematică* a acesteia. Comportarea diferitelor materiale (metalice, polimeri, ceramice, compozite, etc.) în aceleași condiții de solicitare poate fi extrem de variată. Nu poate exista un model unic pentru o varietate atât de mare de materiale. Chiar pentru același material avem modele diferite pentru comportarea acestuia în domeniul liniar elastic, peste limita de elasticitate, pentru comportarea vâscoelastică, etc. Cel mai simplu model este cel elaborat pentru materialele elastice având curba caracteristică liniară.

Modelul clasic, care stă la baza Rezistenței Materialelor și a Teoriei Elasticității, este adecvat comportării oțelului solicitat în domeniul de proporționalitate, dar și altor materiale care au o comportare similară. Pentru elaborarea modelului trebuie reținuți anumiți factori care au o influență majoră și neglijăți cei care au o influență nesemnificativă și ar aduce complicații de calcul însemnate. Reținerea factorilor esențiali se face prin formularea unor ipoteze simplificatoare.

La baza modelului clasic stau următoarele ipoteze simplificatoare în condiții de valabilitate în raport cu rezultatele experimentale:

Ipoteza mediului continuu

Această ipoteză consideră că la scară macromecanică materia poate fi considerată continuă și nu discretă cum este în realitate (formată din atomi și molecule). Mai apropiată de realitate la corpurile amorfe și mai depărtată la cele cristaline, această ipoteză permite lucrul cu funcții continue și trecerea la limită. Studiarea structurii reale, discontinuă cere folosirea unui aparat matematic mult mai complicat.

Ipoteza omogenității mediului

Se admite că materialul este omogen, având aceleași proprietăți fizico-chimice în tot volumul său.

Ipoteza mediului izotrop

Materialul este considerat izotrop, adică caracteristicile elastice și mecanice sunt aceleași în toate direcțiile.

Ipoteza elasticității perfecte

Se admite comportarea perfect elastică a materialului, adică revenirea la forma și dimensiunile inițiale după înlăturarea sarcinilor care au produs deformarea.

Ipoteza deformațiilor mici

Pentru majoritatea corpurilor solide deformațiile elastice sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpurilor. Ca urmare, sub acțiunea sarcinilor corpul solid își modifică în mică măsură configurația inițială. Aceasta face ca ecuațiile de echilibru static să poată fi scrise pentru corpul deformat la fel ca pentru cel nedeformat, respectiv ca în urma deformării direcțiile forțelor și distanțele dintre ele să rămână neschimbate. Această ipoteză conduce de asemenea la simplificarea calculelor (infinitesimale mici de ordinul doi care pot fi neglijate, etc.).

Ipoteza proporționalității între tensiuni și deformații

Dacă solicitarea corpului este de o așa manieră încât materialul rămâne în domeniul elastic, se admite că între tensiuni și deformații există o dependență liniară, exprimată de legea lui Hooke. Ca o consecință a acestei legi la rezolvarea unor probleme în Rezistența materialelor se poate aplica *principiul suprapunerii efectelor* sau *principiul independenței efectelor forțelor*.

Principiul lui Saint-Venant

Enunțul acestui principiu este următorul: *dacă un sistem de forțe este înlocuit cu un alt sistem static echivalent, aceasta produce diferențe apreciable în starea de tensiuni și deformații din vecinătatea forțelor dar rămâne fără efect (sau cu efecte neglijabile) la distanțe suficient de mari de locul de aplicație a forțelor*. Principiul este ilustrat în figura 3.17. O grindă în consolă are pe capătul

liber, în prima variantă (figura 3.17a), o forță distribuită. În figura 3.17b sarcina distribuită a fost înlocuită cu o forță concentrată static echivalentă ($Q = F$). La locul de aplicare a sarcinii efectul forței asupra grinzii va fi cu totul diferit în cele două variante. Această înlocuire însă nu produce modificări în starea de tensiuni și deformații în secțiunea A-A, aflată la o distanță suficient de mare pe forță. Prin aplicarea sarcinilor se realizează o stare locală de solicitare în jurul locului de aplicare, precum și o stare generală a corpului solid solicitat. Studiul solicitării barelor și plăcilor urmărește stabilirea, în special, a stării generale de solicitare.

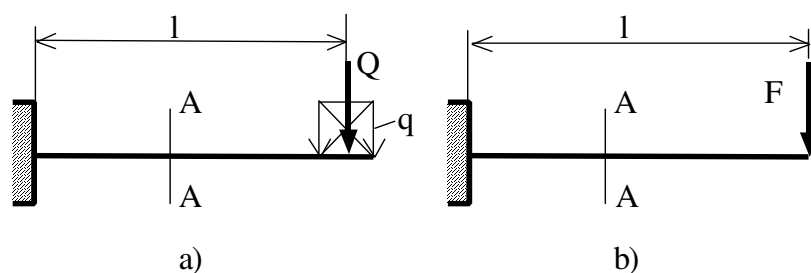


Figura 3.17

Ipoteza stării naturale

Se presupune că în corpurile solide nu există tensiuni în lipsa sarcinilor. Admițând această ipoteză, se poate demonstra teorema lui Khirchoff care spune că pentru un corp, o rezemare și un sistem de sarcini date, starea de tensiuni și deformații este unică. În realitate toate operațiile tehnologice, care produc încălziri și deformații plastice neuniforme produc tensiuni care rămân în corp în lipsa încărcărilor, numite *tensiuni remanente*. În cazul solicitărilor statice ele pot avea un efect benefic dacă sunt de sens contrar tensiunilor create de către sarcini, dar sunt nefavorabile dacă lucrează în același sens cu tensiunile de serviciu. Tensiunile remanente influențează semnificativ comportarea la solicitări variabile. Aceste tensiuni pot fi mult diminuate în urma unui tratament termic de detensionare, tratament care este dificil de aplicat structurilor de mari dimensiuni.

Ipoteza lui Bernoulli (ipoteza secțiunilor plane)

Această ipoteză este formulată astfel: *o secțiune plană și normală pe axa geometrică a barei înainte de deformare, rămâne plană și perpendiculară pe axa deformată și după deformare barei*. În figura 3.18 este ilustrată această ipoteză pentru solicitarea la tracțiune (figura 3.18a) și la încovoiere (figura 3.18b). Conform acestei ipoteze secțiunea **AB** din bara solicitată la tracțiune de către forța **P** se deplasează paralel cu ea însăși în **A'B'**, iar secțiunea transversală **AB** din grinda solicitată la încovoiere rămâne plană și normală la axa deformată a grinzii.

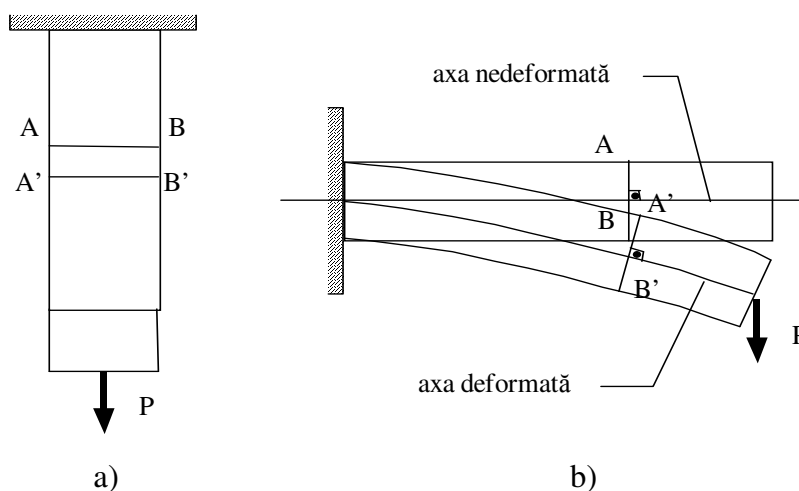


Figura 3.18

Aplicarea ipotezei lui Bernoulli la studiul tensiunilor normale pe secțiunea transversală, la solicitarea de tracțiune și încovoiere, conduce la o repartitie liniară a acestora. Această ipoteză aduce o scădere semnificativă a volumului de calcul. Ipoteza nu este admisă în Teoria Elasticității.

3.3. Metode de calcul în Rezistența Materialelor

3.3.1 Considerații generale

Scopul calculelor de rezistență este asigurarea siguranței în exploatare a mașinilor, utilajelor și structurilor, chiar și în condițiile cele mai defavorabile. Pentru asigurarea acestei siguranțe proiectantul trebuie să-și ia precauțiile ce se impun. În Rezistența Materialelor se disting trei tipuri de probleme sau calcule:

Probleme de verificare

Calculul de verificare se efectuează pentru o piesă dată, la care se cunosc forma, dimensiunile și materialul din care este confecționată, în scopul determinării tensiunilor și deformațiilor produse de acțiunea sarcinilor și comparării acestora cu cele admisibile. Practic scopul acestui calcul este de a preciza efectul încărcării sarcinilor asupra corpului studiat, trăgând concluzii asupra posibilității servirii scopului în bune condiții și în deplină siguranță.

Probleme de dimensionare

Calculul de dimensionare se efectuează pentru determinarea formei și dimensiunilor unei piese, prin asigurarea rezistenței sale și a unor deformații admisibile, în funcție de sarcinile exterioare și de material.

Probleme de stabilire a capacității de încărcare

Fiind cunoscută piesa cu elementele sale bine precizate și cunoscând materialul din care este confecționată (materialul este definit prin caracteristicile sale mecanice), se stabilesc prin calcul încărcările maxime ce pot solicita corpul fără a fi depășite condițiile din starea limită considerată.

Metodele de calcul din Rezistența Materialelor trebuie să stabilească cum se poate ține seama de caracterul aleatoriu al mărimilor cu care se operează în

calculele atunci când se exprimă siguranța și prin ce mărime cuantificabilă se poate exprima această siguranță.

Metoda de calcul *cuprinde ansamblul de reguli prin care se ține seama de variația aleatoare a parametrilor care determină siguranța unui element sau a unei structuri și prin care se stabilește mărimea pe care trebuie s-o determine cantitativ.*

3.3.2. Metoda tensiunilor admisibile

Este cea mai veche metodă în domeniul calculelor de rezistență, care consideră drept criteriu de rezistență a corpului tensiunile care apar în acesta, care nu trebuie să depășească o anumită limită, considerată periculoasă. Altfel spus, tensiunea maximă care poate fi admisă în exploatare, numită *tensiune admisibilă*, trebuie să fie de c ori mai mică decât tensiunea periculoasă. Prin urmare:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{peric}}}{c} \quad (3.22)$$

respectiv

$$\tau_a = \frac{\tau_{\text{peric}}}{c}$$

unde: c - coeficient de siguranță (un număr supraunitar).

Tensiune periculoasă este considerată ca fiind tensiunea de rupere (σ_r sau τ_r) în cazul materialelor fragile, care au o diagramă caracteristică liniară până aproape de rupere și fără palier de curgere (*figura 3.19a*), dar și pentru materiale tenace, atunci când apariția unor deformații plastice locale nu afectează buna funcționare a ansamblului (de exemplu structurile mari confecționate din oțeluri tenace). Pentru structurile din materiale tenace la care apariția deformațiilor plastice împiedică buna funcționare a ansamblului și poate conduce chiar la

distrugerea acestuia drept tensiune periculoasă este aleasă cea de curgere (σ_c sau τ_c) așa cum este indicat în figura 3.19b.

Tensiunea admisibilă este valoarea convențională aleasă în calcul pentru tensiunea maximă care se poate produce în corp, în condiții date de material și solicitare.

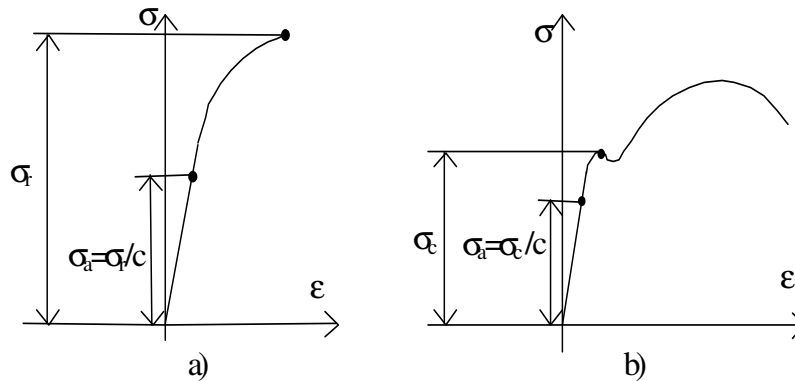


Figura 3.19

Din motive de siguranță tensiunile maxime care apar în piese nu pot depăși tensiunile admisibile:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_a; \quad \tau_{\max} \leq \tau_a \quad (3.23)$$

Relațiile de mai sus stau la baza calculului de rezistență prin metoda tensiunilor admisibile. Calculul este condus astfel:

- din analiza diagramelor de eforturi și a repartiției tensiunilor pe secțiunea transversală se stabilește secțiunea în care apare tensiunea maximă (secțiunea periculoasă);

- valoarea găsită pentru tensiunea cea mai mare se compară cu mărimea tensiunii admisibile. Funcție de natura problemei această operație de comparare capătă unul din următoarele două aspecte: în problemele de dimensionare se impune ca tensiunea maximă să fie egală cu tensiunea admisibilă, iar în problemele de verificare se impune condiția ca tensiunea maximă să fie mai mică sau cel mult egală cu tensiunea admisibilă.

Coeficientul de siguranță și tensiunea admisibilă se aleg către proiectant, având în vedere un număr mare de factori și fenomene, cum ar fi:

Natura materialului

Se ține seama:

- dacă materialul este ductil sau fragil,
- de gradul de dispersie al caracteristicilor mecanice și elastice,
- de omogenitatea acestuia.

Astfel, în cazul materialelor tenace coeficientul de siguranță este mai mic decât cel corespunzător materialelor fragile, deoarece acestea din urmă sunt mai sensibile la diferite deteriorări accidentale și la defecte tehnologice. Cu cât materialul este mai neomogen cu atât se vor lua tensiuni admisibile mai mici, respectiv coeficienți de siguranță mai mari (de exemplu pentru fontă, beton, piatră la care gradul de neomogenitate este mai mare se aleg coeficienți de siguranță mai mari decât la oțel).

Mediul în care lucrează piesa sau structura

Sunt situații în care piesele lucrează la temperaturi ridicate (cazane, turbine cu aburi, etc.) sau coborâte, iar în alte cazuri ele lucrează în prezența agenților corozivi care produc o oxidare a piesei. Alte piese sunt supuse unei uzuri mari. Toți acești factori produc în timp o slăbire a pieselor, fapt care impune alegerea unor valori inferioare ale tensiunii admisibile, respectiv a unor coeficienți de siguranță măriți.

Precizia modelului de calcul adoptat (cât de mult se poate îndepărta de realitate)

În cazul în care ipotezele de calcul sunt incerte atunci pentru tensiunea admisibilă se vor alege limitele inferioare din cele recomandate de literatura de specialitate.

Tipul solicitării (solicitări simple, compuse) și modul de acțiune al sarcinilor (static, dinamic, alternant)

Dacă o piesă este supusă numai la solicitări statice simple atunci tensiunea admisibilă se alege ca o valoare corespunzătoare acestei solicitări. Pentru solicitările variabile în timp valoarea aleasă este mai mică pentru a se ține seama de pericolul rupei prin oboseală. Spre exemplu pentru piesele din oțel cu rupere ductilă supuse la solicitări statice simple, la temperatura mediului, coeficientul de siguranță va fi $c = 1,2 \div 1,6$, iar pentru piesele din materiale cu rupere fragilă, solicitate în același condiții, se poate alege $c = 2,5 \div 3$.

Alți factori de care se ține seama în alegerea coeficientului de siguranță și tensiunii admisibile sunt:

- precizia evaluării sarcinilor și a posibilităților de apariție, pe durata exploatării, a unor suprasarcini;
- eventualele tratamente termice, termochimice, mecanice sau acoperiri metalice ale piesei;
- micșorarea secțiunilor nominale ca urmare a toleranțelor de execuție negative, uzurii, coroziunii;
- importanța piesei, durata ei de funcționare și ce s-ar întâmpla dacă aceasta s-ar distruge (amplarea pagubelor materiale, pierderi de vieți omenești, poluare).

Prin urmare coeficientul de siguranță trebuie să fie acoperitor pentru tot ceea ce proiectantul nu cunoaște cu precizie. Deși există normative privind alegerea coeficienților de siguranță, totuși adoptarea acestora necesită experiență în domeniu și conține o anumită doză de subiectivism.

Metoda coeficienților de siguranță parțiali își propune să limiteze subiectivismul în alegerea coeficienților de siguranță. Această metodă exprimă coeficientul de siguranță ca produs al unor coeficienți de siguranță parțiali, fiecare dintre aceștia reflectând influența unui factor sau grup de factori. În general se recomandă utilizarea a $2 \div 10$ coeficienți parțiali.

În cazul utilizării a trei coeficienți de siguranță parțiali se poate scrie:

$$c = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \quad (3.24)$$

unde:

c_1 – coeficientul de siguranță care ține cont de evaluările sarcinilor și tensiunilor;

c_2 - coeficientul de siguranță care ține cont de neomogenitatea materialului și de posibilitatea apariției unor defecte la prelucrare;

c_3 - coeficientul de siguranță care ține cont de importanța piesei și de condițiile de exploatare.

Se recomandă:

- pentru o precizie ridicată $c_1=1,2\div1,5$, pentru una mai scăzută $c_1 = 2\div3$;
- pentru materiale ductile $c_2 = 1,2\div1,8$, pentru materiale fragile $c_2 = 3\div4$, iar pentru materiale foarte fragile $c_2 = 4\div6$;
- $c_3 = 1\div1,5$.

3.3.3. Metoda sarcinii limită (de rupere)

Metoda tensiunilor admisibile consideră drept stare limită atingerea tensiunii periculoase (σ_c sau σ_r) într-un singur punct. Sunt situații când atingerea tensiunii de curgere într-o secțiune sau într-un punct al unei structuri nu duce la cedarea elementului sau a structurii în ansamblu. Astfel, la elementele cu stări de tensiune neomogenă, la elemente cu secțiune neomogenă sau la structurile static nedeterminate alcătuite din materiale ductile se constată că intensitatea forțelor care corespund cedării este mai mare decât valoarea la care apare într-un punct (cel mai sollicitat) tensiunea de curgere. În situația în care piesa are o capacitate portantă mai mare, sarcina maximă admisibilă se calculează cu relația:

$$F_{\max} \leq \frac{F_{\text{peric}}}{c} \quad (3.25)$$

unde: $F_{\max}$ - sarcina maximă admisibilă pentru structură;

F_{peric} - sarcina la care cedează structura.

Între aceste două metode principala diferență constă în faptul că metoda tensiunilor admisibile apreciază siguranța în raport cu limita stadiului elastic (admisă ipotetic ca sollicitarea pentru care tensiunea maximă atinge valoarea

limitei de curgere, respectiv a rezistenței de rupere), iar metoda sarcinii de rupere în raport cu stadiul de cedare (rupere). Cea de a doua metodă introduce un coeficient de siguranță global care nu ține cont de influența diferiților factori, însă aplicarea sa conduce la economii de material. În condiții de asigurare similare, la elementele din materiale ductile cu stări de tensiune neomogene sau static nedeterminate rezultă valori diferite ale coeficientului de siguranță la cele două metode. Spre deosebire de metoda tensiunilor admisibile unde coeficientul de siguranță este cuprins în însăși valoarea tensiunii admisibile, în metoda sarcinii limită coeficientul de siguranță este explicit.

3.3.4. Metode probabilistice

Studiul statistic al datelor obținute în cursul unor experimente permite stabilirea unor legi de distribuție privind răspândirea și repartiția lor. Pe baza acestor legi, Teoria Probabilităților dă posibilitatea să se prevadă ce valori va avea mărimea studiată într-un experiment viitor. Prevederea se realizează cu o probabilitate aleasă aprioric. Este posibil în acest fel să se estimeze valoarea minimă sau maximă pe care le va lua o variabilă aleatoare, cu probabilitatea aleasă.

Analizării statistice a variabilelor aleatoare i se adaugă o mărime de tip probabilist de apreciere a siguranței: *probabilitatea de cedare*. Ea reprezintă probabilitatea ca valoarea S a răspunsului să depășească valoarea probabilă a răspunsului limită și se notează $P(S > S_{min})$. În acest caz condiția de rezistență exprimă condiția ca probabilitatea de cedare să fie inferioară unei valori admise și se exprimă sub forma:

$$P(S > S_{min}) \leq P_a \quad (3.26)$$

unde:

P_a - probabilitatea admisă pentru cedare (stabilită pe baza unor considerente economice, sociale, etc.).

3.3.5. Condiții de rigiditate

Pentru ca funcționarea ansamblurilor să fie posibilă trebuie ca deformațiile pieselor componente să nu depășească anumite limite. Aceasta înseamnă ca în afară de *condițiile de rezistență*, care limitează tensiunile, structurile trebuie să satisfacă și anumite *condiții de rigiditate*, prin care se limitează deformațiile liniare sau unghiulare ale acestora. Pentru asemenea situații dimensiunile pieselor vor fi stabilite din limitarea rigidității și deci a deplasărilor sau deformațiilor în raport cu anumite valori admisibile. Astfel:

$$\delta_{\max} \leq \delta_a; \theta_{\max} \leq \theta_a \quad (3.27)$$

unde valorile admisibile sunt de c ori mai mici decât cele periculoase:

$$\delta_a = \frac{\delta_{\text{peric}}}{c}; \theta_a = \frac{\theta_{\text{peric}}}{c} \quad (3.28)$$

3.3.6. Condiții de stabilitate

Chiar dacă sunt satisfăcute condițiile de rezistență, în anumite cazuri, cum ar fi la compresiunea barelor lungi sau încovoierea grinzilor cu inimă înaltă, depășirea unor valori critice pentru sarcini (forța critica de flambaj, respectiv momentul încovoietor critic de flambaj) conduce la apariția fenomenului de pierdere a stabilității (flambaj) și la distrugerea corpului. Pentru a preîntâmpina apariția flambajului se impune condiția ca sarcinile aplicate să fie inferioare celor critice.

Condițiile de rezistență, rigiditate și stabilitate trebuie să fie satisfăcute simultan de către orice piesă sau structură.

CAPITOLUL 4

TEOREME ȘI METODE ENERGETICE

4.1. Considerații generale

Sub acțiunea sarcinilor corpurile elastice se deformează, punctele de aplicație ale forțelor exterioare se deplasează și în consecință efectuează un lucru mecanic exterior. Până la limita de elasticitate lucrul mecanic cheltuit pentru deformarea corpului nu se pierde ci se înmagazinează în corpul solid deformat, acesta acumulând energie potențială elastică de deformare. În Rezistența materialelor și Teoria elasticității există multe metode pentru determinarea deplasărilor, ridicarea nedeterminărilor, calculul la solicitări compuse, calculul la stabilitate elastică, bazate pe legea conservării energiei și deci pe calculul energiei de deformare.

Ipotezele care stau la baza principalelor teoreme referitoare la energie precum și a metodelor de calcul care fac apel la aceasta (metode energetice) sunt:

- materialul este solicitat cel mult până la limita de elasticitate (are o comportare perfect elastică), fiind valabilă legea lui Hooke;

- forțele exterioare sunt aplicate static (viteza de deformare este foarte mică, deci energia cinetică este practic nulă);
- se neglijează efectele termice, piezoelectrice, emisiile ultrasonore care însoțesc fenomenul deformației corpurilor, energia disipată de aceste fenomene fiind mult mai mică decât cea de deformare elastică;
- se neglijează frecările interioare și frecările în reazeme.

4.2. Teoremele lui Clapeyron. Lucrul mecanic exterior

Se consideră un sistem elastic asupra căruia acționează în mod static forța F . Sistemul se deformează cu cantitatea δ . Energia cinetică a sistemului deformat, aflat în echilibru static, este nulă. Deplasarea forței F pe distanța δ produce un lucru mecanic. Acesta provine din variația de energiei potențiale de poziție a forței și se numește *lucru mecanic al forțelor exterioare*, L_e .

În lipsa unor schimbări de energie cu mediul, în baza legii conservării energiei, se poate spune că lucrul mecanic exterior este egal cu energia potențială de deformare a barei, U deci:

$$L_e = U \quad (4.5)$$

Relația (4.1) reprezintă prima teoremă a lui Clapeyron, care se enunță astfel: pentru un corp elastic aflat în repaus, lucrul mecanic exterior (produs de către sarcini) este egal cu energia potențială de deformare acumulată de către acel corp.

Lucrul mecanic exterior se înmagazinează în corp sub formă de energie potențială de deformare, reprezentând lucrul mecanic pe care îl execută eforturile interioare din corp. La descărcarea corpului, energia potențială de deformare se transformă în lucru mecanic, aducând corpul la forma și dimensiunile inițiale (pentru corpul descărcat energia de deformare este nulă, corpul formând un sistem conservativ).

Dacă forța este constantă pe toată durata deplasării (această ipoteză poate fi admisă în cazul deplasării libere a unor corpuri, pe distanțe relativ mari), atunci lucrul mecanic exterior este definit prin produsul dintre proiecția forței pe direcția deplasării și deplasare:

$$L = F \delta \quad (4.6)$$

În cazul deformațiilor elastice forța variază pe toată durata deplasării și relația (4.2) poate fi aplicată la deplasări incrementale, pe parcursul cărora forța poate fi considerată aproximativ constantă (*figura 4.1*):

$$dL_e \approx F d\delta \quad (4.7)$$

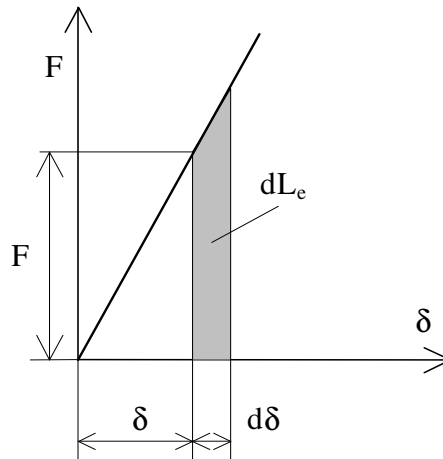


Figura 4.1

Între forță și deplasare există o relație liniară:

$$F = k \delta \quad (4.8)$$

Din relația (4.4) rezultă:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{k} F \\ d\delta &= \frac{1}{k} dF \end{aligned} \quad (4.9)$$

Din relațiile (4.3) și (4.5) se obține:

$$dL_e \approx \frac{1}{k} F dF$$

(4.10)

Forța fiind aplicată static (intensitatea forței crește lent de la zero la valoarea finală) lucrul mecanic L_e , efectuat pe durata creșterii lui F , se obține prin integrare:

$$L_e = \int_0^F dL_e = \frac{1}{k} \int_0^F F dF = \frac{1}{k} \frac{F^2}{2} = \frac{1}{2} F \frac{F}{k}$$

(4.11)

Ținând cont de relația (4.5), relația (4.7) devine:

$$L_e = \frac{F\delta}{2}$$

(4.12)

Prin urmare la *deplasările liniar-elastice lucrul mecanic al unei forțe exterioare egal cu semi-produsul dintre forță și deplasarea pe direcția forței.*

Observații:

Se observă că lucrul mecanic al forțelor exterioare este numeric egal cu aria triunghiului din diagrama $F-\delta$ (figura 4.1).

Pentru un moment concentrat M , care produce o rotire φ , se poate demonstra o relație similară pentru expresia lucrului mecanic exterior:

$$L_e = \frac{M\varphi}{2}$$

(4.13)

În relațiile (4.8) și (4.9) coeficientul 1/2 este caracteristic materialelor liniar-elastice.

Deplasările sunt măsurate în punctele de aplicare ale sarcinilor, pe direcția acestora.

Dacă asupra unui sistem elastic sunt aplicate simultan mai multe forțe $F_1...F_n$ și momente $M_1...M_m$, astfel încât deplasările finale să fie $\delta_1... \delta_n$ și respectiv $\varphi_1... \varphi_m$, atunci lucrul mecanic exterior se calculează cu relația:

$$L_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j \quad (4.14)$$

Relația (4.10) exprimă cea de a doua teoremă a lui Clapeyron, care se enunță astfel: lucrul mecanic efectuat de sarcinile exterioare, care acționează static asupra unui corp liniar-elastic este independent de ordinea în care sunt aplicate aceste sarcini și este egal cu semisuma produselor fiecărei sarcini prin deplasarea corespunzătoare.

Deplasarea finală a unei sarcini este influențată de prezența celorlalte. Este greșit să se calculeze lucrul mecanic exterior total ca sumă a lucrului mecanic exterior al fiecărei sarcini, care acționează independent asupra corpului.

4.3. Energia potențială de deformare

4.3.1 Energia potențială de deformare specifică

Energia potențială de deformare specifică reprezintă energia de deformare înmagazinată de unitatea de volum. Se determină în continuare expresia acestei energii.

Dintr-un corp solid, elastic deformabil se izolează un element de volum, cu latura egală cu unitatea (*figura 4.2*). Cubul este orientat astfel încât două fețe paralele să fie normale pe axa barei (muchiiile perpendiculare pe aceste fețe sunt paralele cu axa barei). Cubul este supus la tracțiune cu tensiunea σ . Forța finală care acționează în direcția solicitării este $F = \sigma \cdot 1 \cdot 1$ (produsul dintre tensiunea σ și suprafața pe care acționează). Sub acțiunea acestor tensiuni normale laturile cubului paralele cu axa barei se vor alungi. Unitatea de lungime este foarte mică și alungirea sa este ϵ .

Pentru o deplasare a forței pe direcția ei cu ϵ aceasta produce un lucru mecanic egal cu energia potențială de deformare acumulată de elementul reprezentat în *figura 4.2* (datorită faptului că latura cubului este egală cu unitatea σ și ϵ joacă rolul de forță , respectiv de alungire).

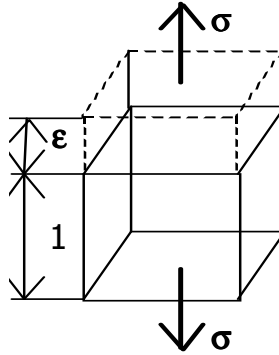


Figura 4.2

Prin urmare se poate scrie:

$$L_{el} = U_1 = \frac{\sigma}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \epsilon = \frac{\sigma}{2} \cdot \epsilon \quad (4.11)$$

Relația (4.11) reprezintă expresia energiei de deformare specifică acumulată în unitatea de volum pentru tracțiunea simplă și este numeric egală cu aria triunghiului hașurat din figura 4.3.

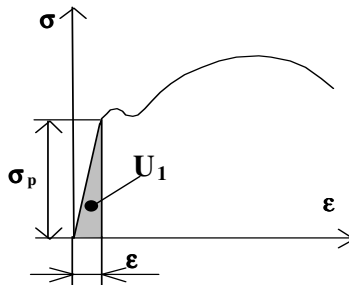


Figura 4.3

Similar, pentru forfecare sau torsiune se poate scrie:

$$U_1 = \frac{\tau \gamma}{2} \quad (4.12)$$

Ținând cont de legea lui Hooke, din *relațiile* (4.11) și (4.12) rezultă:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\sigma^2}{2E} \\ U_1 &= \frac{\tau^2}{2G} \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.3.2. *Energia potențială de deformare elementară și totală*

Dacă se izolează din același corp un paralelipiped elementar având muchia **dx** paralelă cu axa barei, elementul de volum va fi: **dV = dA dx = dx dy dz**. Când pe fețele **dA** vor acționa tensiuni, *energia potențială de deformare elementară* (energia potențială de deformare înmagazinată de un element de volum **dV**) se obține înmulțind energia de deformare specifică cu volumul elementului. Prin urmare:

$$dU = U_1 \, dV \quad (4.14)$$

sau particularizând pentru cele două tensiuni rezultă:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\sigma^2}{2E} dV \\ dU &= \frac{\tau^2}{2G} dV \end{aligned} \quad (4.15)$$

Prin *energie potențială de deformare totală* se înțelege suma energiilor elementare extinsă la întregul volum al barei. Înlocuind *relațiile* (4.15), rezultă formulele pentru determinarea energiei potențiale de deformare înmagazinată în volumul **V**:

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \\ U &= \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.4. Principiul independenței acțiunii forțelor și a suprapunerii efectelor (principiul Boltzmann)

Acest principiu, poate fi aplicat în toate cazurile în care există o relație liniară între două mărimi fizice. Problemele la care se poate aplica principiul suprapunerii efectelor se numesc *probleme cu liniaritate fizică*. În cazul materialelor liniar-elastice relații liniare există între:

- forțe și deplasări;
- momente și rotiri;
- tensiuni și deformații specifice (legea lui Hooke).

Se consideră un corp elastic asupra căruia se aplică simultan un sistem de n forțe $F_1 \dots F_n$, astfel încât fiecare forță să ajungă de la zero la valoarea maximă în același timp. Aceleași forțe se aplică apoi pe rând asupra corpului. Starea finală de tensiuni, deformații specifice și deplasări va fi aceeași ca în primul caz de încărcare și nu depinde de ordinea aplicării forțelor.

Se încarcă apoi corpul cu numai câte o forță din sistemul inițial obținând n cazuri de încărcare independente. Starea finală de tensiuni, deformații specifice și deplasări dintr-un punct va fi egală cu suma algebrică a tensiunilor, deformațiilor specifice și respectiv deplasărilor din cele n cazuri de încărcare (*figura 4.4*).

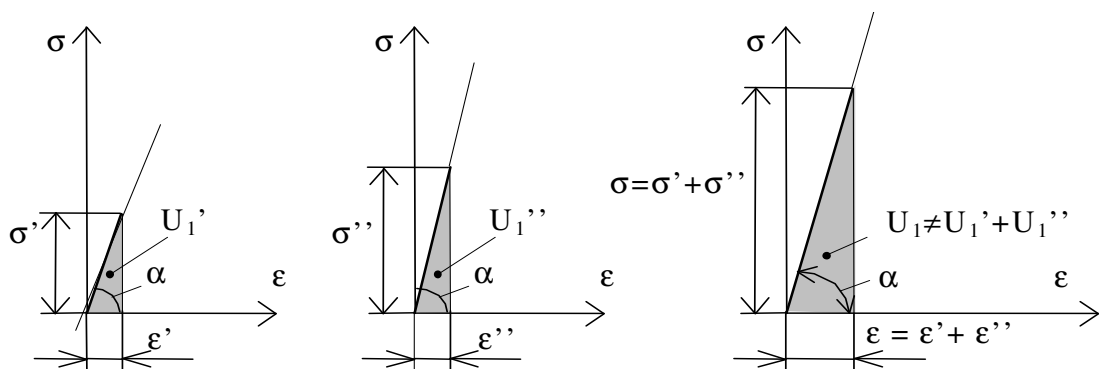


Figura 4.4

Din aceeași figură se constată că energia finală de deformare nu este egală cu suma energiilor din cele n cazuri de încărcare (deoarece energia nu este funcție liniară de tensiuni).

Observații:

Principiul suprapunerii efectelor se aplică pentru tensiuni și deformații specifice dar nu se aplică pentru energia de deformare.

Acest principiu aduce mari simplificări ale calculelor în Rezistența Materialelor.

4.5. Teorema reciprocității lucrului mecanic virtual (teorema Betti)

Se consideră un corp elastic încărcat în punctele i, j cu forțele F_i și F_j . Se notează cu δ_{ij} deplasarea punctului i , pe direcția forței F_i , produsă de către forța F_j , care acționează în j . Inițial se încarcă corpul cu forța F_i și apoi cu forța F_j (figura 4.5a), iar apoi se inversează ordinea aplicării forțelor (figura 4.5b). În figura 4.5 s-a reprezentat cu linie întreruptă suprafața deformată a corpului încărcat cu forța F_i și cu linie punct suprafața deformată a corpului încărcat cu forța F_j . Se va studia deformația corpului aplicând principiul independenței acțiunii forțelor și a suprapunerii efectelor și se va scrie lucrul mecanic al forțelor exterioare pentru cele două cazuri de încărcare.

În prima varianta de încărcare (figura 4.5a) se înregistrează deformațiile δ_{ii} (în i) și δ_{ji} (în j) atunci când se încarcă corpul cu forța F_i . Când se încarcă apoi corpul cu forța F_j se produc deformațiile δ_{ij} (în i) și δ_{jj} (în j). Lucrul mecanic al forțelor exterioare va fi în acest caz:

$$L'_e = \frac{1}{2} F_i \delta_{ii} + \frac{1}{2} F_j \delta_{jj} + F_i \delta_{ij} \quad (4.17)$$

Ultimul termen din relația (4.17) nu se înmulțește cu coeficientul $1/2$ deoarece la aplicarea forței F_j , forța F_i atinsese deja valoarea maximă și în consecință F_i a fost constantă pe toată durata deplasării δ_{ij} .

În a doua variantă, aplicând mai întâi forța F_j (figura 4.5b) se înregistrează deformațiile δ_{ij} (în i) și δ_{jj} (în j). Aplicând apoi forța F_i , rezultă deformațiile δ_{ii} (în i) și δ_{ji} (în j).

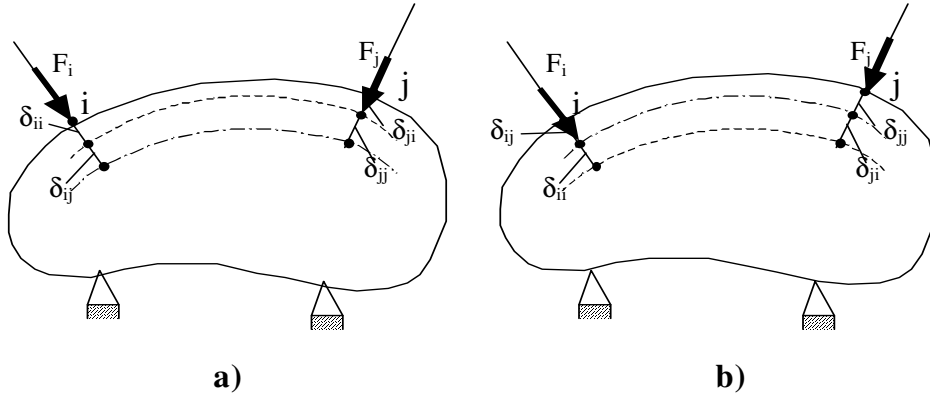


Figura 4.5

În acest caz lucrul mecanic al forțelor exterioare va fi:

$$L_e'' = \frac{1}{2} F_i \delta_{ii} + \frac{1}{2} F_j \delta_{jj} + F_j \delta_{ji} \quad (4.18)$$

Deoarece valoarea lucrului mecanic al forțelor exterioare nu depinde de ordinea aplicării forțelor, se poate scrie $L_e' = L_e''$. Prin urmare, egalând relațiile (4.17) și (4.18) rezultă (după reduceri):

$$F_i \delta_{ij} = F_j \delta_{ji} \quad (4.19)$$

Relația (4.19) poate fi scrisă sub următoarea formă și reprezintă expresia matematică a teoremei reciprocității lucrului mecanic virtual:

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (4.20)$$

Teorema se enunță astfel: *dacă asupra unui corp elastic se aplică succesiv două stări de încărcare, atunci lucrul mecanic virtual efectuat de către sarcinile din prima stare cu deplasările din cea de a doua, este numeric egal cu lucrul mecanic virtual efectuat de sarcinile din a doua stare de încărcare cu deplasările din prima stare.*

4.6. Teorema reciprocității deplasărilor (teorema lui Maxwell)

Această teoremă poate fi privită ca un caz particular al teoremei reciprocității lucrului mecanic virtual. Astfel, dacă în *relația (4.19)* se admite că cele două forțe sunt egale ($F_i = F_j = F$) se obține:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (4.21)$$

*Relația (4.21) este expresia matematică a **teoremei reciprocității deplasărilor**, care se enunță astfel: deplasarea produsă în punctul i al unui corp elastic, de către o forță aplicată în punctul j , este egală cu deplasarea produsă în punctul j de către aceeași forță care acționează în punctul i , ambele deplasări fiind pe direcția forței.*

4.7. Teoremele lui Castigliano

Se consideră un corp elastic încărcat cu un sistem de forțe concentrate $F_1, \dots, F_i, \dots, F_n$ în echilibru. Se presupune ca forțele acționează independent una în raport cu cealaltă. Sub acțiunea acestor forțe corpul se deformează și înmagazinează o energie potențială de deformare egală cu:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (4.22)$$

S-a notat unde δ_i deplasarea punctului i , pe direcția forței F_i , produsă de sistemul de forțe considerat.

Deoarece deplasările pot fi exprimate funcție de forțe (vezi *relația 4.5*), rezultă că energia potențială de deformare este funcție de forțele care solicită corpul: $U = f(F_1 \dots F_i \dots F_n)$.

Se presupune că după încărcarea corpului cu sistemul de sarcini, se dă uneia dintre forțe, de exemplu forței F_i , o creștere infinit mică dF_i (*figura 4.6a*). Ca urmare a acestui fapt, energia potențială de deformare va crește cu o cantitate infinit mică dU și energia înmagazinată de către corpul elastic devine:

$$U' = U + dU = U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i \quad (4.23)$$

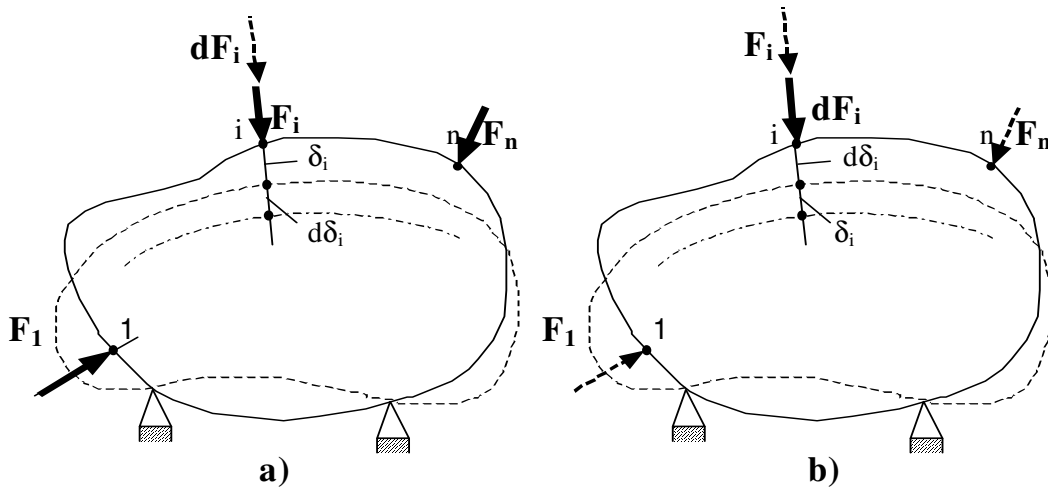


Figura 4.6

Se inversează apoi ordinea aplicării forțelor, aplicând mai întâi forța $d\mathbf{F}_i$. Punctul de aplicație i a forței suferă o deplasare foarte mică $d\delta_i$ pe direcția forței $d\mathbf{F}_i$ și corpul înmagazinează o energie de deformare elementară:

$$\frac{1}{2} dF_i d\delta_i \quad (4.24)$$

Apoi, se aplică sistemul de sarcini $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_i, \dots, \mathbf{F}_n$. Acesta va deforma corpul care va înmagazina o energie potențială de deformare U dată de relația (4.22). În plus forța $d\mathbf{F}_i$ (care era la intensitatea maximă când s-a aplicat sistemul de sarcini) rămâne constantă și se deplasează cu δ_i (figura 4.6b). Energia înmagazinată de către corp, în acest caz, va fi:

$$U'' = U + \frac{1}{2} dF_i d\delta_i + dF_i \delta_i \quad (4.25)$$

Dar valoarea energiei potențiale de deformare nu depinde de ordinea aplicării forțelor, deci $U' = U''$. Egalând relațiile (4.23) și (4.25) rezultă:

$$U + \frac{\partial U}{\partial F_i} dF_i = U + \frac{1}{2} dF_i d\delta_i + dF_i \delta_i \quad (4.26)$$

După efectuarea reducerilor și neglijarea infinitului mic de ordinul al doilea rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i \quad (4.27)$$

Relația (4.27) reprezintă expresia primei teoreme a lui Castigliano, care se enunță astfel: derivata parțială a energiei potențiale de deformare înmagazinată de către un corp elastic, în raport cu o forță concentrată este numeric egală cu deplasarea punctului de aplicație al forței, în sensul și pe direcția forței.

Dacă se consideră corpul elastic încărcat cu un sistem de momente concentrate, se poate demonstra, în mod similar, următoarea relație, care reprezintă **a doua teoremă a lui Castigliano**:

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \varphi_i \quad (4.28)$$

Enunțul teoremei este: derivata parțială a energiei de deformare, în raport cu un moment concentrat, este numeric egală cu rotirea punctului de aplicație al momentului în sensul de rotire al acestuia.

Observații:

Deplasarea δ_i dată de relația (4.27) are loc în sensul forței F_i dacă rezultă pozitivă și în sens contrar forței dacă rezultă negativă.

Rotirea φ_i dată de relația (4.28) are loc în sensul momentului M_i dacă este pozitivă și în sens contrar dacă este negativă.

4.8. Teorema energiei potențiale minime (Menabrea)

Teoremele lui Castigliano pot fi aplicate la calculul sistemelor static nedeterminate. Fie un corp elastic de **n** ori static nedeterminat, încărcat cu un sistem oarecare de sarcini (figura 4.7a).

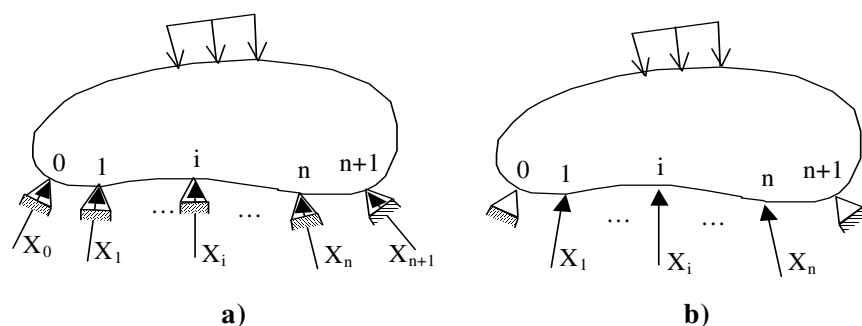


Figura 4.7

Se îndepărtează n legături, astfel încât sistemul să devină static determinat. Reazemele înlăturate se înlocuiesc cu reacțiunile $X_1 \dots X_n$ (figura 4.7b).

Se aplică prima teoremă a lui Castigliano pentru fiecare reacțiune, considerând reazemele perfect rigide (deplasările din reazeme nule) și rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \dots \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0; \dots \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \quad (4.29)$$

Aceste ecuații, împreună cu cele de echilibru, formează un sistem ale cărui soluții sunt reacțiunile.

Considerând însă că $U = f(X_1, \dots, X_n)$, relațiile (4.29) reprezintă derivatele parțiale ale lucrului mecanic și exprimă condiția ca funcția să aibă un punct de extrem (maxim sau minim). Deoarece U este întotdeauna pozitivă, derivatele de ordinul doi sunt pozitive, deci extremul este un minim.

Prin urmare **teorema lui Menabrea** poate fi enunțată astfel: *într-un sistem static nedeterminat, necunoscutele static nedeterminate iau asemenea valori încât energia potențială de deformație a sistemului să fie minimă.*

Observații:

Raționamentul precedent poate fi aplicat și în cazul sistemelor static nedeterminate interior. Necunoscutele în acest caz vor fi momente încovoietoare, forțe tăietoare, forțe axiale și momente de răsucire.

Se ajunge la concluzia că mărimile secționale static nedeterminate interior au astfel de valori încât lucrul mecanic de deformare al întregului corp elastic să fie minim.

Esențial în aplicarea acestei teoreme este ca:

- înainte de aplicare să se elimine un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare (adică teorema se aplică doar pe sisteme static determinate);*
- necunoscutele în raport cu care se aplică teorema trebuie să fie static nedeterminate (necunoscute care nu pot fi determinate din ecuațiile staticii).*

În practică se utilizează consecința acestei teoreme: derivata parțială a energiei de deformare a unui sistem static nedeterminat, în raport cu o necunoscută static nedeterminată, este nulă.

4.9 Metoda Maxwell-Mohr pentru determinarea derivatelor eforturilor

Metoda Maxwell-Mohr simplifică calculul derivatelor parțiale ale eforturilor dintr-o secțiunea curentă a corpului în raport cu o forță concentrată sau un moment concentrat.

Se consideră, spre exemplu expresia momentului încovoietor dintr-o secțiune curentă a unei grinzi, solicitată de un sistem de sarcini concentrate, sub următoarea formă:

$$M_z(x) = M_1 + \dots + M_i + \dots + M_n + F_1 b_1 + \dots + F_j b_j + \dots + F_m b_m \quad (4.30)$$

unde:

$M_1 \dots M_n$ - momentele concentrate care soliciță grinda;

$F_1 \dots F_m$ - forțele concentrate care sunt aplicate pe grindă;

$b_1 \dots b_m$ - brațele forțelor.

Se derivează funcția $M_z(x)$ în raport cu F_j și M_i . Se obține:

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} = b_j; \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} = 1 \quad (4.31)$$

Aceleași relații se obțin dacă se egalează cu unitatea sarcina în raport cu care se face derivarea și se anulează toate celelalte sarcini. Astfel, dacă se consideră succesiv că $M_i = 1$, respectiv $F_i = 1$ și toate celelalte momente și forțe concentrate se fac zero se obține:

$$M_z(x) = 1 = \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} = m(x) \quad (4.32)$$

respectiv:

$$M_z(x) = b_j = \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} = m(x) \quad (4.33)$$

În cele ce urmează se vor folosi următoarele notații:

$M_z(x)$ - momentul încovoietor în secțiunea x , pentru încărcarea corpului cu sarcinile reale;

$m(x)$ - momentul încovoietor fictiv, determinat în aceeași secțiune x , cu toate sarcinile nule, cu excepția celei în raport cu care se face derivarea, care este egală cu unitatea.

Determinat în aceste condiții, momentul fictiv $m(x)$ este egal cu derivata parțială, deci:

$$m(x) = \frac{\partial M_z(x)}{\partial M_i} \quad \text{sau} \quad m(x) = \frac{\partial M_z(x)}{\partial F_j} \quad (4.34)$$

Observație:

Raționamentul anterior este valabil și în cazul în care pe grinda sunt aplicate și sarcini distribuite.

Metoda Mohr-Maxwell poate fi aplicată similar și pentru celelalte eforturi (forțe axiale, forțe tăietoare și momente de răsucire). Se vor folosi notațiile:

$$n(x) = \frac{\partial N(x)}{\partial F_i}; \quad t(x) = \frac{\partial T_y(x)}{\partial F_i}; \quad m_t(x) = \frac{\partial M_t(x)}{\partial F_i} \quad (4.35)$$

unde $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{t}(\mathbf{x})$, $\mathbf{m}(\mathbf{x})$, $\mathbf{m}_t(\mathbf{x})$ se numesc *coeficienți de influență* și reprezintă eforturile secționale într-o secțiune curentă cauzate de o sarcină egală cu unitatea, având același punct de aplicație și aceeași direcție ca și sarcina în raport cu care se face derivarea. Sarcina unitară se aplică singură pe corp într-o a doua stare de solicitare în care toate celelalte sarcini se anulează. Practic *relațiile* (4.32), (4.33), (4.35) arată că derivatele parțiale reprezintă eforturile secționale cauzate de o sarcină egală cu unitatea, aplicată singură pe corp în locul sarcinii în raport cu care se face derivarea.

4.10 Metoda Mohr-Vereșceaghin

După cum se va vedea ulterior, aplicarea teoremelor lui Castigliano sau Menabrea, pentru calculul barelor drepte, va conduce la rezolvarea unor integrale de tipul: $\int M_z(x)m(x)dx$; $\int N(x)n(x)dx$, etc. Calculul integralelor se poate face analitic dar, în unele situații, calculul poate fi simplificat prin aplicarea *metodei de integrare grafo-analitică Mohr-Vereșceaghin*, denumită și *metoda de înmulțire a diagramelor*. Metoda este aplicabilă tuturor integralelor, care conțin un produs de două funcții continue, dintre care una este o funcție liniară.

Deoarece toate integralele sunt identice ca structură, se va face în continuare referire la integrala $\int M_z(x)m(x)dx$. În general $M_z(\mathbf{x})$ este o funcție oarecare. Funcția $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ este momentul încovoietor dat de către un moment concentrat sau o forță concentrată unitară și în consecință poate fi constantă sau poate avea cel mult o variație liniară.

Se reprezintă în *figura 4.8* diagramele de variație a momentelor încovoietoare, atât pentru încărcarea dată, M_z cât și pentru sarcina –unitate, $\mathbf{m}$. Prima diagrama de momente este delimitată de o curbă oarecare, iar a doua de o linie dreaptă.

Ne propunem să calculăm integrala:

$$I = \int_{l_1}^{l_2} M_z(x) m(x) dx \quad (4.36)$$

În figura (4.8) din prima diagramă rezultă:

$$M_z(x) dx = dA \quad (4.37)$$

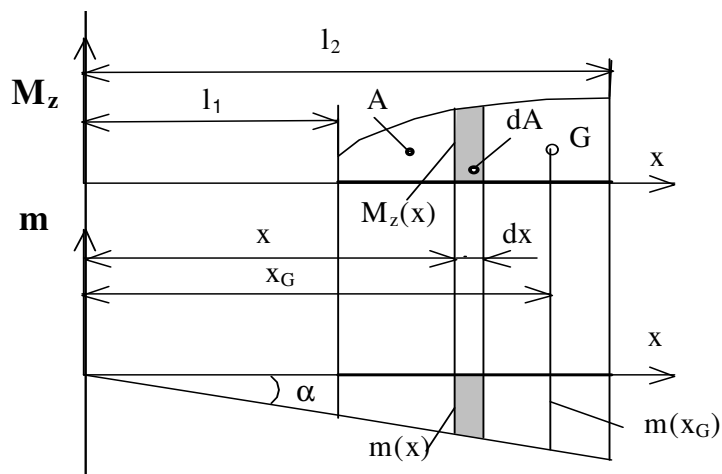


Figura 4.8

iar din diagrama **m** rezultă:

$$m(x) = x \quad \text{tg} \alpha \quad (4.38)$$

Înlocuind (4.37) și (4.38), relația (4.36) devine:

$$I = \text{tg} \alpha \int_A x dA = \text{tg} \alpha \quad S_y \quad (4.39)$$

unde: S_y - momentul static al suprafeței diagramei M_z față de axa ordonatelor.

Acest moment static poate fi scris:

$$S_y = x_G A \quad (4.40)$$

unde: A – aria diagramei M_z ;

x_G - abscisa centrului de greutate al diagramei M_z .

Înlocuind (4.40) în relația (4.39) rezultă:

$$I = x_G \quad \text{tg} \alpha \quad A \quad (4.41)$$

Din figura 4.8 se poate scrie:

$$x_G \operatorname{tg} \alpha = m(x_G) \quad (4.42)$$

Înlocuind (4.42) în (4.41) și ținând cont de *relația* (4.36) se obține:

$$I = \int_{l_1}^{l_2} M_z(x) m(x) dx = A m(x_G) \quad (4.43)$$

Pe această relație se bazează **metoda Mohr-Vereșceaghin**. *Relația (4.43) arată că integrala definită din produsul funcțiilor $M_z(x) \cdot m(x)$ este numeric egală cu produsul dintre suprafața diagramei $M_z(x)$, luată între limitele de integrare, și valoarea funcției $m(x)$, calculată în dreptul centrului de greutate al primei diagrame.*

Observații:

În cazul în care și diagrama $M_z(x)$ este liniară rolul celor două diagrame poate fi inversat.

Metoda de integrare grafo-analitică Mohr-Vereșceaghin se aplică pentru fiecare porțiune a sistemului de bare, atât pentru solicitarea de încovoiere cât și pentru celelalte solicitări.

4.11. Metoda eforturilor

Fie un corp elastic de **n** ori static nedeterminat, încărcat cu un sistem oarecare de sarcini (*figura 4.7a*). Se înlocuiesc **n** reazeme cu reacțiunile care apar în ele $X_1 \dots X_n$, astfel încât sistemul să devină static determinat. Sistemul astfel obținut (*figura 4.7b*) se numește *sistem de bază*.

Mai întâi se studiază sistemul de bază încărcat numai cu sarcinile exterioare, necunoscutele static nedeterminate fiind nule ($X_1 = \dots = X_n = 0$). Pentru această variantă de încărcare se notează cu δ_{i0} deplasarea punctului de aplicare a forței X_i , pe direcția acesteia, cu $i = 1 \dots n$.

Se studiază apoi sistemul de bază fără sistemul de sarcini exterior, dar încărcat pe rând numai cu câte una din necunoscutele static nedeterminate, care

devine egală cu unitatea. În acest caz se notează cu $\delta_{1i} \dots \delta_{ii} \dots \delta_{ni}$ deplasările punctelor de aplicație ale necunoscutelor static nedeterminate, pe direcția acestora pentru $X_i = 1$. Ca urmare a proporționalității dintre sarcini și deformații, rezultă că deplasările produse de către sarcina reală $X_i \neq 1$, care acționează singură asupra sistemului de bază, vor fi: $\delta_{1i}X_i, \dots, \delta_{ii}X_i, \delta_{ji}X_i, \dots, \delta_{ni}X_i$.

Într-un punct **j** deplasările produse de către cele **n** necunoscutele static nedeterminate vor fi: $\delta_{j1}X_1 \dots \delta_{jn}X_n$. Deplasările punctului **j**, pe direcția necunoscutei X_j , atunci când necunoscuta considerată egală cu unitatea este aplicată succesiv în punctele **1...n**, vor fi: $\delta_{j1} \dots \delta_{jn}$.

Aplicând principiul suprapunerii efectelor, se determină deplasarea punctului **j** sub acțiunea simultană a tuturor necunoscutelor static nedeterminate $X_1 \dots X_n$:

$$\delta'_j = \delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n \quad (4.44)$$

Dar punctul **j** se află la contactul cu un reazem rigid și prin urmare deplasarea sa totală (suma algebrică a tuturor deplasărilor din acest punct) trebuie să fie nulă, deci:

$$\delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{jn}X_n + \delta_{j0} = 0 \quad (4.45)$$

Relații similare se pot scrie pentru toate celelalte reazeme. Se obține astfel următorul sistem:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Sistemul obținut este format dintr-un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor static nedeterminate și reprezintă *sistemul de ecuații canonice folosit de metoda eforturilor*. El poate fi scris astfel indiferent de forma corpului sau a sistemului de corpuri și prin rezolvarea lui se determină valorile necunoscutelor static nedeterminate $X_1 \dots X_n$.

Calculul necesită determinarea prealabilă a coeficienților de influență δ_{ij} (care reprezintă deplasări fictive) și a termenilor liberi. Pentru aceasta se

folosește **metoda Mohr-Maxwell** sau în cazul sistemelor formate din bare drepte **metoda Mohr-Vereșceaghin**.

Coeficienții de influență δ_{ij} , pentru care $i=j$ se numesc *principali* și aceștia sunt întotdeauna pozitivi. Cei pentru care $i \neq j$ poartă denumirea de *secundari* și pot fi pozitivi, negativi sau egali cu zero. Ca o consecință a teoremei reciprocității deplasărilor, în *sistemul* (4.46), se poate scrie: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Pentru un corp încărcat cu sarcini și supus la dilatări termice împiedicate (acestea produc tensiuni în corp) *sistemul* (4.46) devine:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} + \delta_{1t} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} + \delta_{nt} &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

unde: $\delta_{1t} \dots \delta_{nt}$ - deplasările fictive produse de către temperatură în punctele 1...n ale sistemului de bază, pe direcția necunoscutelor $X_1 \dots X_n$.

În cazul sistemelor plane, la care se neglijează influența forței tăietoare, coeficienții și termenii liberi ai *sistemului* (4.47) pot fi determinați cu următoarele relații:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_i \int_{l_i} \frac{m_i m_j}{EI_z} dx_i + \int_{l_i} \frac{n_i n_j}{EA} dx_i \\ \delta_{i0} &= \sum_i \int_{l_i} \frac{M_0 m_j}{EI_z} dx_i + \int_{l_i} \frac{N_0 n_j}{EA} dx_i \\ \delta_{it} &= \sum_i \int_{l_i} n_i \alpha_i \Delta t_i dx_i \end{aligned} \quad (4.48)$$

unde: M_0 , N_0 - momentul încovoietor și forța axială produse în sistemul de bază de către sarcinile exterioare;

m_i , n_i - momentul încovoietor și forța axială atunci când sistemul de bază este încărcat numai cu $X_i = 1$.

CAPITOLUL 5

SOLICITĂRI AXIALE

5.1. Considerații generale

Un corp este solicitat la tracțiune simplă (uniaxială) sau la compresiune atunci când este solicitat doar cu două forțe axiale (având direcția axei barei), exterioare, opuse și egale. Această categorie de solicitare cuprinde toate piesele “lungi”, din categoria barelor și cablurilor, utilizate în condiții similare cu cele realizate în epruvetele destinate solicitărilor axiale (vezi Capitolul 3). Exemple de piese supuse în special la solicitări axiale sunt: cabluri, biele, șuruburi, bare ale grinzilor cu zăbrele, palete de turbină, stâlpi, etc. În cazul în care suportul forțelor exterioare nu coincide cu axa barei, dar este paralel cu ea, bara va fi supusă, în afara solicitării de întindere sau compresiune și la încovoiere. Această situație constituie solicitarea axială excentrică care va fi studiată în cadrul solicitărilor compuse. În ceea ce privește solicitarea de compresiune a barelor de lungime mare, trebuie făcută precizarea că este posibil să apară fenomenul de flambaj longitudinal (pierderea stabilității înainte ca tensiunea de compresiune să atingă

vreo stare limită), fenomen care va fi neglijat în acest capitol și care va fi studiat într-un alt capitol. Regula care trebuie reținută este aceea că nu se calculează la compresiune barele a căror lungime întrece de cinci ori dimensiunea cea mai mică a secțiunii transversale.

5.2. Tensiuni și deformații

Pentru stabilirea legii de variație a deformațiilor și a tensiunilor pe secțiunea transversală a barei se pornește de la determinări experimentale. Pentru aceasta se consideră o bară dreaptă de lungime l_0 confecționată dintr-un material omogen și izotrop. Secțiunea transversală este constantă în lungul barei și are aria A . Înainte de încercare, pe suprafața barei se trasează o rețea de linii paralele și perpendiculare pe axă, la distanțe egale (figura 5.1a).

Ca urmare a solicitării cu forță axială F , bara se deformează astfel că pe direcția forței distanțele între linii se măresc, iar pe direcție normală se micșorează (figura 5.1b). Liniile perpendiculare pe axă se deplasează paralel cu pozițiile inițiale, ceea ce denotă că alungirile și corespunzător lor alungirile specifice sunt constante pe contur. Unghiurile drepte nu se modifică după deformarea piesei. Experimentul indică faptul că, în urma acestei solicitări apar numai tensiuni normale și se verifică ipoteza lui Bernoulli.

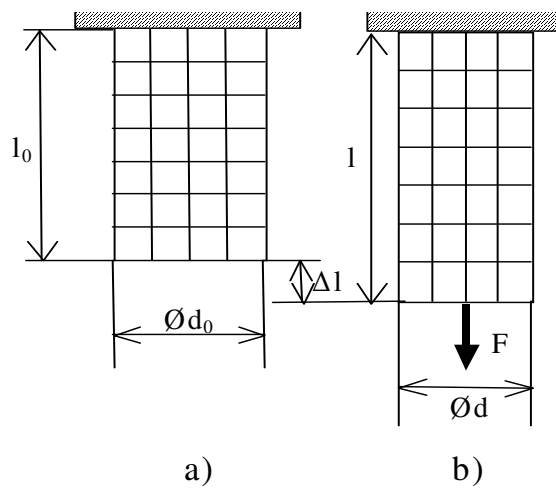


Figura 5.1

Calculul tensiunilor

Pentru o bară confecționată dintr-un material liniar-elastic, supusă la solicitări axiale, relația dintre tensiuni și deformațiile specifice este dată de legea lui Hooke (relația 3.12). Deoarece alungirile specifice sunt constante, iar tensiunile sunt proporționale cu deformațiile specifice (conform legii amintite) rezultă că $\sigma_x = \text{constant}$ pe secțiunea transversală. În acest caz ecuația de echivalență (2.16) devine:

$$N = \sigma_x \int_A dA \quad (5.15)$$

de unde rezultă:

$$N = \sigma_x A \quad (5.2)$$

sau

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad (5.3)$$

unde: σ_x – tensiunea normală într-o secțiune curentă a barei;

N - forța axială în secțiunea respectivă, care se determină din diagrama de eforturi;

A – aria secțiunii transversale a barei.

Relația (5.3) poate fi folosită, fără a comite erori mari, la calculul barelor de secțiune variabilă (conice, tronconice, în formă de pană, etc.) supuse la întindere sau compresiune dacă unghiul la vârf 2α (vezi figura 5.2) nu depășește 15° .

Forța axială poate fi constantă sau variabilă în lungul barei. Dacă forța axială este variabilă în lungul axei barei, atunci este necesar, pentru studiul solicitării barei, să se reprezinte diagrama forțelor axiale. Modul de construire a diagramei este descris într-o aplicație care va fi prezentată ulterior în acest capitol. Într-o secțiune curentă a barei forța axială N este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa Ox (axa barei) a tuturor forțelor exterioare situate la stânga

sau la dreapta secțiunii considerate. Forța axială este considerată pozitivă atunci când produce o solicitare de întindere în secțiunea considerată (dacă pleacă din secțiune) și negativă atunci când produce o solicitare de compresie (dacă intră în secțiune). Similar tensiunile, alungirile specifice și deplasările vor fi considerate pozitive pentru tracțiune și negative pentru compresie.

Dimensionare și verificare

Calculul de dimensionare se face la proiectarea pieselor și permite stabilirea dimensiunilor secțiunii transversale a piesei solicitate axial. Dimensionarea prin metoda tensiunilor admisibile presupune că tensiunile maxime din piesă (luate în modul) nu vor depăși pe cele admisibile conform relației:

$$\sigma_{x,\max} \leq \sigma_a \quad (5.4)$$

Ținând cont și de relația (5.3) formula de dimensionare este:

$$A_{\text{nec}} = \frac{N}{\sigma_a} \quad (5.5)$$

Calculul de verificare se face pentru piese la care se cunosc dimensiunile secțiunii transversale. De obicei, acest calcul constă în verificarea inegalității din relația (5.4). Dacă inegalitatea se verifică, piesa rezistă la sarcinile propuse.

O altă variantă a acestui calcul presupune determinarea sarcinii maxime pe care o poate suporta piesa, numită sarcină capabilă. Calculul se face cu o relație de forma:

$$N_{\text{cap}} = A\sigma_a \quad (5.6)$$

Calculul deformațiilor și deplasărilor

În cazul barelor sau porțiunilor de bară de secțiune constantă, supuse la eforturi axiale constante (tensiuni constante), alungirea specifică poate fi determinată cu relația:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \quad (5.7)$$

deci: $\Delta l = \varepsilon_x l$.

Ținând cont de relațiile (3.12) și (5.3) rezultă:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (5.8)$$

Se observă că deformația este cu atât mai mică cu cât produsul dintre modulul de elasticitate E al materialului și aria secțiunii transversale A este mai mic. Ca urmare acest produs se numește modul de rigiditate la întindere-compresiune a secțiunii transversale.

În cazul în care tensiunilor variază pe lungimea barei se izolează un element de bară de lungime dx (figura 5.2), pe această distanță tensiunile putând fi considerate aproximativ constante. În consecință se pot aplica relațiile (5.7), (5.8) și se obține:

$$\Delta(dx) = \varepsilon_x dx = \frac{Ndx}{EA} \quad (5.9)$$

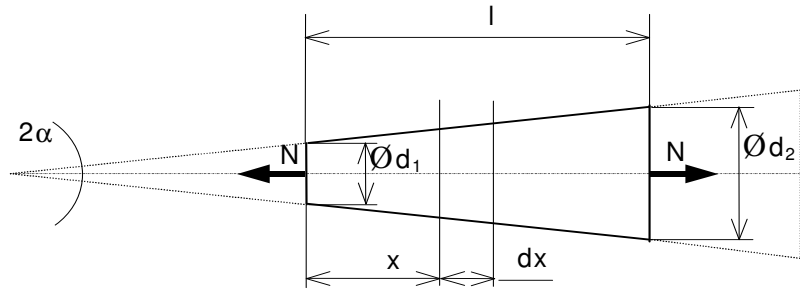


Figura 5.2

Alungirea totală a barei se obține integrând expresia (5.9) pe lungimea l a barei:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x(x) dx = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (5.10)$$

În relația (5.10) forța axială și aria pot fi funcții de x .

Observații:

În relația (5.7) ε_x are semnul lui σ_x (pozitiv pentru tracțiune și negativ la compresiune).

Relațiile (5.8) și (5.10) pot fi folosite pentru calculul deplasării relative, adică deplasarea unei secțiuni a barei față de altă secțiune, respectiv a deplasării unui punct de pe axa barei.

În cazul barelor cu mai multe regiuni deplasările absolute ale secțiunilor acestor bare (față de un reper fix) se calculează prin însumarea algebrică a deplasărilor porțiunilor de bară (pe fiecare regiune, deplasările au semnul tensiunilor).

5.3. Energia potențială de deformare

Ținând cont de expresia energiei specifice de deformare pentru cazul solicitărilor axiale centrice dată de relația (4.13), pentru o porțiune de lungime l a barei se poate scrie:

$$U = \int_V U_1 dV = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad (5.11)$$

Ținând cont de relația (5.3) se obține:

$$U = \int_0^l \frac{N^2(x)}{2A(x)E} dx \quad (5.12)$$

Dacă pentru porțiunea studiată forța axială și aria sunt constante (nu depind de x), expresia energiei din relația (5.12) devine:

$$U = \frac{N^2 l}{2AE} \quad (5.13)$$

Dacă bara are mai multe regiuni, energia totală acumulată va fi suma algebrică a energiilor corespunzătoare de pe cele n regiuni:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (5.14)$$

Aplicație

Se consideră bara de oțel solicitată ca în figura 5.3a. Să se traseze diagramele de efort (forță axială N), de tensiune σ și deplasare δ . Să se dimensioneze bara, știind că: $F = 130 \text{ KN}$, $l = 500 \text{ mm}$, $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rezolvarea problemei cuprinde mai multe etape, prezentate în continuare:

1. Trasarea diagramelor de efort

1.1. Trasarea diagramei de forță axială

1.1.1. Figurarea și calculul reacțiunilor

Deoarece bara este solicitată numai cu forțe axiale, în încastrare apare doar reacțiunea V (sensul lui V a fost ales arbitrar). Scriind proiecția forțelor pe verticală și admitând sensul forței $2F$ pozitiv (sensul pozitiv este ales arbitrar) se obține următoarea ecuație din care se calculează reacțiunea:

$$\sum X_i = 0 \Rightarrow 2F - 4F - V = 0 \Rightarrow V = -2F$$

Semnul (-) ne arată că, de fapt, sensul lui V este opus celui din figura 5.3a.

1.1.2. Împărțirea barei în regiuni și secționarea barei

Din punctul de vedere al încărcărilor, bara prezintă numai două regiuni. Prin fiecare regiune se face câte o secțiune (x_1 și x_2). Prin metoda secțiunilor se pun în evidență eforturile și tensiunile. Balustrarea marchează originea secțiunii aleasă pentru secțiunea respectivă.

În fiecare din cele două secțiuni se scrie expresia forței axiale ținând cont de definiția acestuia și de convenția de semne precizate anterior.

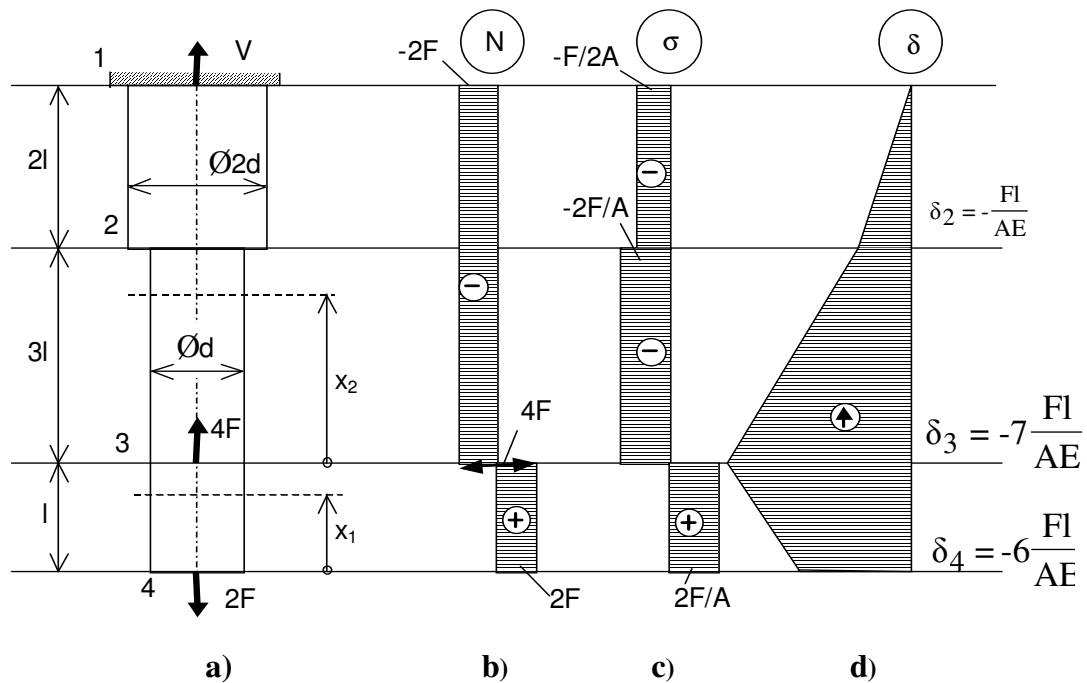


Figura 5.3

Astfel, în prima secțiune cu $x_1 \in [0, l]$ se izolează porțiunea de lungime x_1 . Se scrie expresia forței axiale, luând în considerație forțele din partea de jos a secțiunii și se obține:

$$N(x_1) = 2F$$

Forța $2F$ a fost considerată pozitivă deoarece porțiunea de bară din figura 5.3a este supusă la tracțiune ($2F$ pleacă din secțiune).

Din regiunea a doua se izolează porțiunea de bară de lungime $l+x_2$ și se procedează ca mai sus. Pentru $x_2 \in [0, 5 \cdot l]$, luând în considerație forțele din partea de jos a secțiunii se obține:

$$N(x_2) = 2F - 4F = -2F$$

Evident că același lucru s-ar fi obținut dacă se luau în considerație forțele din partea sus a secțiunii (reacțiunea V cu semnul plus). Forța $4F$ a fost considerată negativă deoarece comprimă porțiunea de bară considerată (intră în secțiune). Reprezentarea grafică a funcțiilor $N(x_1)$ și $N(x_2)$ dă diagrama de efort

N din figura 5.3b. Porțiunea dintre grafic și axa Ox se hașurează perpendicular pe axă.

Se observă că în diagrama N apar salturi care sunt produse de către forțele concentrate care acționează pe bară. Ca regulă generală, care permite și o verificare a diagramei N, în dreptul fiecărei forțe concentrate de pe bară, în diagrama N se produce un salt egal în modul cu valoarea forței respective.

1.2. Trasarea diagramei de tensiuni σ

Din punctul de vedere al tensiunilor și deformațiilor bara prezintă trei regiuni, deoarece aceste mărimi depind și de valoarea efectivă a ariei secțiunii transversale. Pentru calculul tensiunilor normale se utilizează relația (5.3). Se

notează cu A aria secțiunii transversale a barei pe prima regiune: $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Pe a

treia regiune aria este: $\frac{\pi(2d)^2}{4} = 4A$.

Pe cele trei regiuni de pe bară tensiunile vor fi:

- pentru $x_1 \in [0, l]$:

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{A} = \frac{2F}{A}$$

- pentru $x_2 \in [0, 3l]$:

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{A} = \frac{2F}{A}$$

- pentru $x_3 \in [3l, 5l]$:

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_2)}{4A} = \frac{2F}{4A} = \frac{F}{2A}$$

Reprezentarea grafică a celor trei funcții ne dă diagrama σ , din figura 5.3c.

1.3. Trasarea diagramei δ

Pe porțiuni de bară, deplasările δ se calculează cu relațiile (5.8) sau (5.10). Așa cum s-a precizat anterior aceste relații dau deplasarea absolută (când un

capăt este fix) sau deplasarea relativă a capetelor unei porțiuni de bară. În diagrama δ se trec deplasările absolute raportate la un sistem fix. Pentru o porțiune de bară deplasările sunt funcții liniare de x . În problema studiată deplasările absolute se raportează la încastrare. Se vor calcula deplasările absolute numai în secțiunile 2, 3 și 4 (în încastrare deplasarea este nulă) și apoi aceste valori vor fi unite prin segmente de dreaptă. Se obține diagrama δ .

Se notează cu:

- δ_{i-j} deplasarea relativă a secțiunii i față de j ;
- δ_i deplasarea absolută a secțiunii i (față de reperul fix din încastrare).

Se obține:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0 \\ \delta_{2-1} &= \delta_2 = \frac{-2F2l}{4AE} = \frac{-Fl}{AE} \\ \delta_{3-2} &= \frac{-2F3l}{AE} = \frac{-6Fl}{AE} \\ \delta_{4-3} &= \frac{Fl}{AE}\end{aligned}$$

Deplasările absolute vor fi:

$$\begin{aligned}\delta_{3-1} &= \delta_3 = \delta_2 + \delta_{3-2} = -7\frac{Fl}{AE} \\ \delta_{4-1} &= \delta_4 = \delta_3 + \delta_{4-3} = -6\frac{Fl}{AE}\end{aligned}$$

Diagrama δ este prezentată în figura 5.3d. În această diagramă nu pot exista salturi, deoarece un salt ar avea ca semnificație fizică ruperea barei în secțiunea respectivă.

2. Calculul de rezistență: dimensionarea barei

Diametrul barei se determină din relația de dimensionare (5.4). Se alege din diagrama σ valoarea maximă a tensiunii normale: $\sigma_{x,\max} = \frac{2F}{A}$. Particularizând inecuația (5.4) rezultă:

$$\frac{2F}{A} \leq \sigma_a$$

Ținând cont de expresia ariei relația devine:

$$2 \frac{4F}{\pi d^2} \leq \sigma_a$$

Din ultima inecuație rezultă:

$$d \geq \sqrt{\frac{8F}{\pi \sigma_a}}$$

Se înlocuiesc valorile numerice și se efectuează calculul. Se obține:

$$d \geq \sqrt{\frac{8 \cdot 130 \cdot 10^3}{\pi \cdot 150}}; \quad d \geq 46,99 \text{ mm}$$

Valoarea diametrului se rotunjește, de obicei prin adaos. Valorile adoptate pentru dimensiuni trebuie să fie alese dintre cele recomandate de către standarde sau, în lipsa acestora, din șirul dimensiunilor normale. Deoarece valoarea calculată a diametrului este cuprinsă între dimensiunile standardizate de 45 și 50 mm, se adoptă $d = 50 \text{ mm}$.

Observații:

Din figura 5.8c se observă că în ultima regiune tensiunea este mult mai mica decât valoarea admisibilă ceea ce înseamnă un consum excesiv de material.

La materiale fragile se va face o dimensionare pentru regiunile comprimate (cu σ_{ac}) și alta pentru zonele tracționate (cu σ_{at}).

5.4. Bare de lungime mare în câmp gravitațional

În calculele precedente nu s-a ținut cont de greutatea proprie a barelor solicitate la întindere sau la compresiune, considerând că lungimea lor este mică și în acest caz sarcina provenită din greutatea proprie poate fi neglijată față de sarcinile exterioare. Însă, pentru barele de lungime mare greutatea proprie nu mai

poate fi neglijată în raport cu forțele concentrate. Pentru o bară de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, forța axială produsă de către câmpul gravitațional va fi uniform distribuită. Ea reprezintă greutatea unității de lungime și poate fi calculată împărțind greutatea barei la lungimea acesteia.

Se consideră bara de lungime l , având secțiunea constantă, confecționată dintr-un material omogen și izotrop cu greutatea specifică γ (figura 5.4). Bara este solicitată la întindere de forța F și de greutatea proprie. Intensitatea forței distribuite este chiar greutatea unității de lungime: $q = \frac{G}{l}$.

Într-o secțiune situată la distanța x de capătul liber, forța axială este egală cu:

$$N(x) = F + \gamma Ax \quad (5.15)$$

unde: F – forța axială aplicată;

γ – greutatea specifică;

A -aria secțiunii transversale;

x - lungimea elementului considerat.

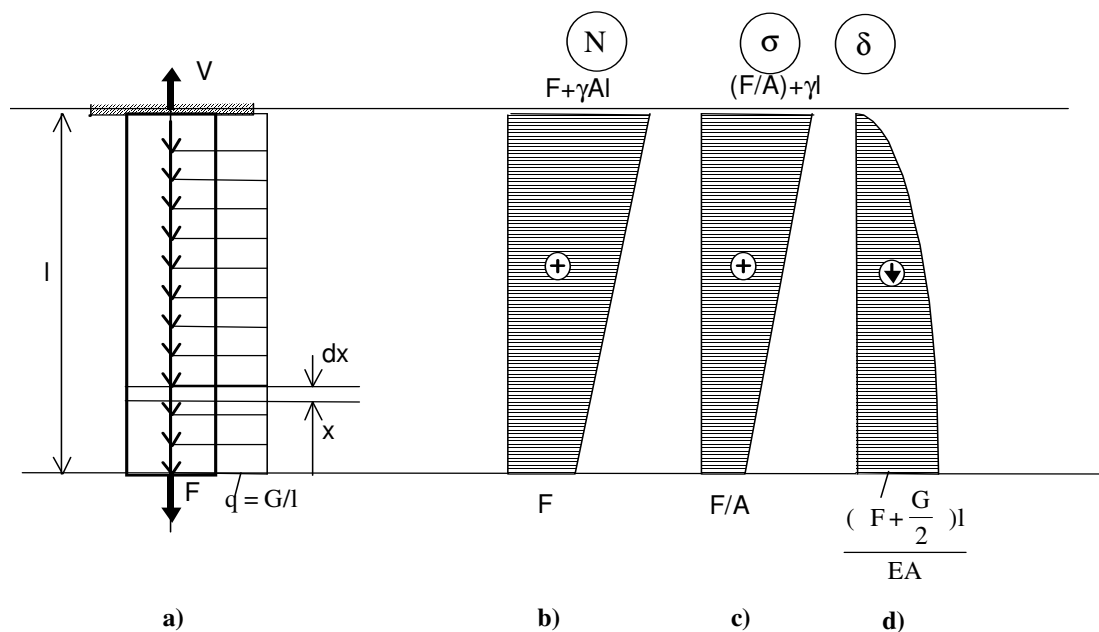


Figura 5.4

Funcția $N(x)$ are o variație liniară de variabilă x . Pe capătul liber forța axială are valoarea minimă egală cu F , iar în încastrare forța axială este egală tocmai cu reacțiunea V (figura 5.4b):

$$N_{\max} = N(l) = F + \gamma Al = F + G \quad (5.16)$$

Funcția de variație a tensiunii normale $\sigma(x)$ este dată de relația:

$$\sigma_x(x) = \frac{F + \gamma Ax}{A} = \frac{F}{A} + \gamma x \quad (5.17)$$

Diagrama de variație a tensiunii este reprezentată în figura 5.4c. Valoarea maximă a tensiunii se obține în încastrare pentru $x = l$:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma l \quad (5.18)$$

Secțiunea din dreptul încastrării, unde se produce tensiunea maximă poartă numele de secțiune periculoasă.

Dimensionarea se face impunând condiția ca tensiunea maximă să nu o depășească pe cea admisibilă:

$$\frac{F}{A} + \gamma l \leq \sigma_a \quad (5.19)$$

Din inegalitatea de mai sus rezultă:

$$A_{\text{nec}} \geq \frac{F}{\sigma_a - \gamma l} \quad (5.20)$$

Deplasarea absolută a secțiunii x față de încastrare este egală cu alungirea barei din partea de sus a secțiunii, de lungime $l-x$ și se determină cu relația (5.10). Se obține:

$$\delta(x) = \int_x^l \frac{N(x)}{EA} dx = \frac{1}{E} \int_x^l \sigma(x) dx \quad (5.21)$$

Înlocuind tensiunea normală cu relația (5.17) și efectuând succesiv calculele rezultă:

$$\delta(x) = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{A} \int_x^l dx + \gamma \int_x^l x dx \right)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{EA} \left[F(l-x) + \frac{\gamma A}{2} (l^2 - x^2) \right] \quad (5.22)$$

$$\delta(x) = \frac{l-x}{EA} \left[F + \frac{\gamma A}{2} (l+x) \right]$$

Parabola de variație a deplasării este reprezentată în figura 5.4d. Deplasarea maximă se obține pentru $x = 0$, adică la capătul liber al barei și este:

$$\delta_{\max} = \frac{1}{EA} \left(F + \frac{\gamma Al}{2} \right) \quad (5.23)$$

sau

$$\delta_{\max} = \frac{\left(F + \frac{G}{2} \right) l}{EA} \quad (5.24)$$

În figura 5.5 sunt prezentate cele trei diagrame pentru cazul particular când bara este sollicitată numai de către greutatea proprie ($F = 0$).

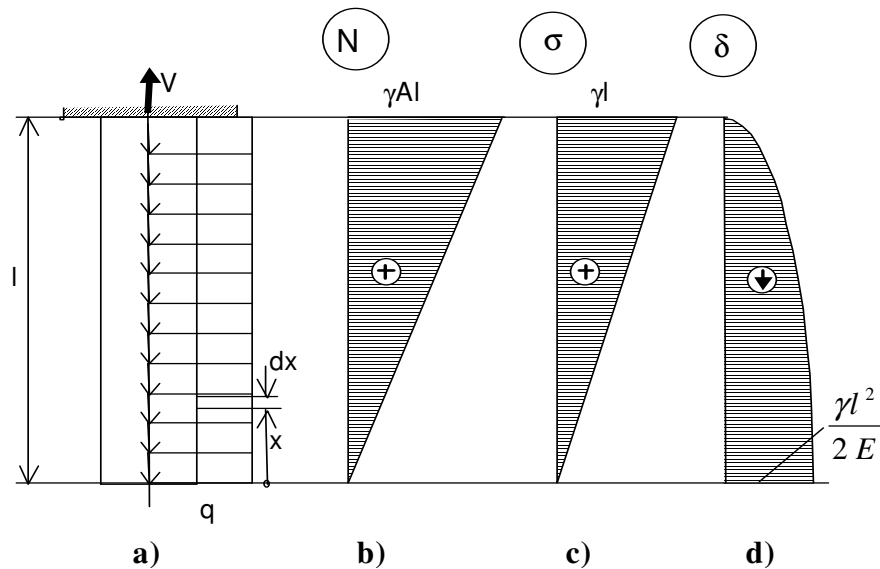


Figura 5.5

În acest caz tensiunea maximă este:

$$\sigma_{\max} = \gamma l \quad (5.25)$$

Această tensiune nu depinde de secțiunea barei și în consecință nu se poate face un calcul de dimensionare. Din relația (5.4) rezultă:

$$\gamma l \leq \sigma_a \quad (5.26)$$

Din ultima inegalitate se poate stabili lungimea maximă a barei:

$$l \leq \frac{\sigma_a}{\gamma} \quad (5.27)$$

Lungimea pentru care se atinge σ_a în bară se numește lungime admisibilă și se determină cu relația:

$$l_a = \frac{\sigma_a}{\gamma} \quad (5.28)$$

Dacă în relația (5.28) se înlocuiește tensiunea admisibilă cu cea de rupere se obține lungimea de rupere a barei sub greutatea proprie:

$$l_r = \frac{\sigma_r}{\gamma} \quad (5.29)$$

Alungirea totală a barei se obține prin particularizarea relației (5.23):

$$\delta_{\max} = \frac{\gamma l^2}{2E} \quad (5.30)$$

Din relația (5.29) se observă că lungimea de rupere este independentă de mărimea secțiunii transversale, fiind funcție numai de caracteristicile materialului.

Cu alte cuvinte, ruperea sub greutatea proprie a unui material se produce întotdeauna la aceeași lungime, indiferent de mărimea secțiunii transversale a barei. Lungimea de rupere sub greutatea proprie reprezintă o importantă caracteristică de material. Comparând lungimile de rupere sub greutatea proprie a două materiale, se poate trage concluzia că din materialul cu l_r mai mare pot fi confecționate structuri mai ușoare, având aceeași capacitate portantă. Pentru construcțiile aero-spațiale se vor folosi materiale care au lungimea de rupere cât mai mare.

5.5. Bare de secțiune variabilă (bara de egală rezistență)

După cum se observă în figura 5.4 la bara verticală de secțiune constantă, aflată în câmp gravitațional, tensiunea maximă se află în încastrare, iar diferența de solicitare între secțiunile transversale este extrem de mare. În consecință, materialul nu este rațional utilizat. Pentru a elimina acest inconvenient ar trebui ca forma barei să fie de așa maniera încât tensiunea normală să fie constantă pe toată lungimea barei și egală cu tensiunea admisibilă. Un astfel de corp se numește solid (bară) de egală rezistență la întindere sau compresiune (figura 5.6a). Această bară este economică, are volumul minim și face parte din categoria corpurilor cu forma rațională. În figura 5.6b diagrama σ este impusă. În cele ce urmează se determina legea după care variază secțiunea barei de egală rezistență. Dintr-un corp a cărei lege de variație a secțiunii transversale de-a lungul barei nu este cunoscută (figura 5.6a) se izolează un volum elementar. Pentru acest volum (figura 5.6b) se scrie ecuația de echilibru a forțelor:

$$\sigma_a (A(x) + dA) - \sigma_a A(x) - dG = 0 \quad (5.31)$$

unde: $dG = \gamma dV \approx \gamma A(x) dx$.

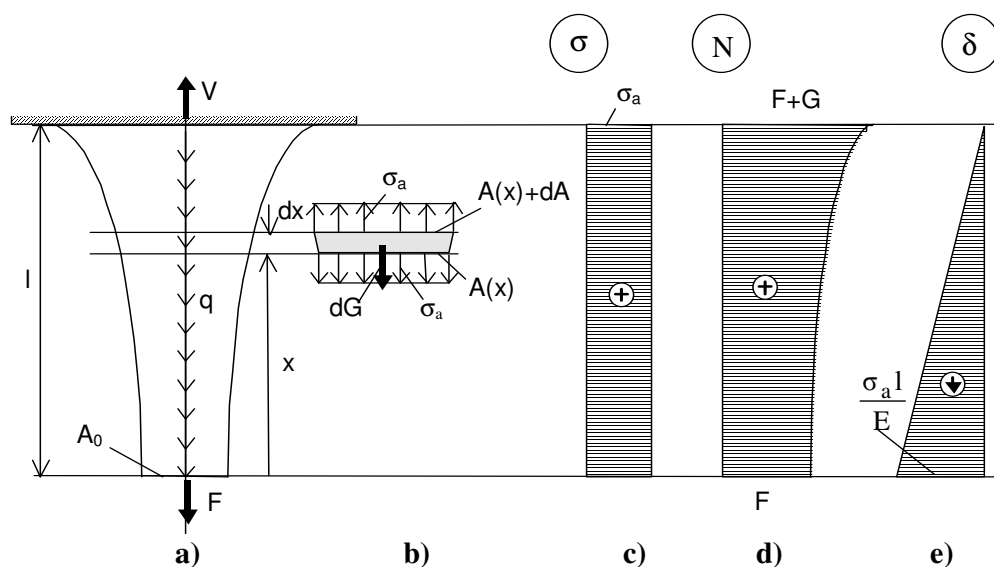


Figura 5.6

Se introduce dG în relația (5.31) și se efectuează calculele. Rezultă următoarea ecuație diferențială cu variabile separabile:

$$\frac{dA}{A(x)} = \frac{\gamma}{\sigma_a} dx \quad (5.32)$$

Prin integrare se obține:

$$\ln A(x) = \frac{\gamma}{\sigma_a} x + C \quad (5.33)$$

Constanta de integrare C se obține din condiția:

$$\text{pentru } x = 0, \quad A(0) = A_0 = \frac{F}{\sigma_a} \quad (5.34)$$

Înlocuind această condiție în relația (5.33) rezultă:

$$\ln A_0 = C \quad (5.35)$$

Ținând cont de expresia constantei relația (5.33) devine:

$$\ln \frac{A(x)}{A_0} = \frac{\gamma}{\sigma_a} x \quad (5.36)$$

de unde rezultă:

$$A(x) = A_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma_a} x} \quad (5.37)$$

Relația (5.37) arată că secțiunea transversală a barei de egală rezistență variază după o lege exponențială.

Deoarece dintre toate barele de lungime l încărcate cu forța F și greutate proprie, bara de egală rezistență are volumul minim, construirea acesteia implică un consum minim de material. Volumul barei se determină cu relația:

$$V = \int_V dV = \int_0^l A(x) dx \quad (5.38)$$

Se înlocuiește $A(x)$ din relația (5.37) și se efectuează calculele. Se obține:

$$V = \frac{\sigma_a}{\gamma} A_0 (e^{l/l_a} - 1) = \frac{\sigma_a}{\gamma} (A - A_0) \quad (5.39)$$

unde: A - secțiunea maximă din încastrare.

Greutatea barei va fi:

$$G = \gamma V \quad (5.40)$$

cu V dat de relația (5.39).

Deplasarea absolută a secțiunii x va fi calculată cu relația:

$$\delta(x) = \int_0^{1-x} \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{\sigma_a (1-x)}{E} \quad (5.41)$$

Pentru $x = 0$ se obține deplasarea maximă a capătului liber:

$$\delta_{\max} = \frac{\sigma_a l}{E} \quad (5.42)$$

Alungirea barei de egală rezistență este maximă în comparație cu oricare altă bară de lungime l , încărcată cu forța F și greutatea proprie.

Energia potențială de deformare pentru bara de egală rezistență este:

$$U = \int_V \frac{\sigma_a^2}{2E} dV \quad (5.43)$$

Se înlocuiește $dV = A(x)dx$, cu $A(x)$ din relația (5.37) și se efectuează calculele. Se obține:

$$U = \frac{F \sigma_a^2}{2E\gamma} (e^{\frac{\gamma}{\sigma_a} l} - 1) \quad (5.44)$$

Deoarece secțiunea barei variază după o lege exponențială, executarea sa este dificilă și scumpă, deoarece de multe ori costul manoperei pentru realizarea barei de egală rezistență depășește prețul materialului economisit. De aceea, în practică, de cele mai multe ori, se preferă aproximarea solidului de egală rezistență cu bare tronconice sau cu bare formate din tronsoane, în care se înscrie bara de egală rezistență (figura 5.7). În acest caz costul manoperei pentru executarea barei scade substanțial, iar economia de material se apropie mult de cea realizată la solidul de egală rezistență.

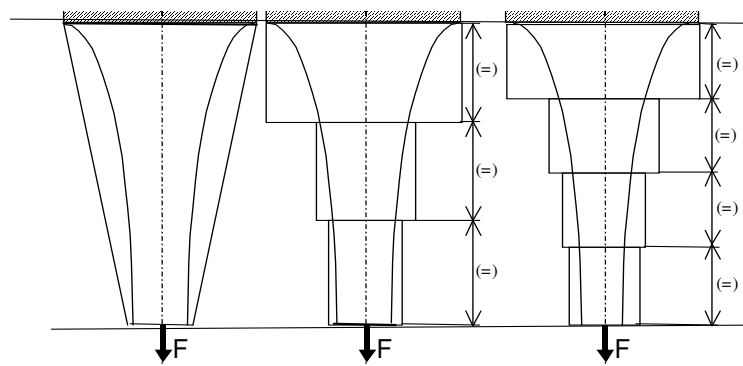


Figura 5.7.

Se poate demonstra că, la aproximarea cu o bară cu tronsoane, economia maximă de material se obține pentru cazul în care lungimile tronsoanelor sunt egale. Realizarea barelor cu un număr mai mare de patru tronsoane nu este în general economică deoarece, în acest caz, economia de material se apropie sensibil de cea care ar fi realizată prin utilizarea solidului de egală rezistență.

Se considera bara cu variația în trepte a secțiunii transversale din figura 5.8. Primul tronson, de lungime l_1 , se dimensionează ca o bară de secțiune constantă, încastrată la partea superioară și încărcată cu forța F și greutatea proprie. Secțiunea periculoasă va fi la partea superioară a tronsonului. Dimensionarea se face impunând condiția ca în secțiunea periculoasă tensiunea să fie egală cu cea admisibilă. Din relația de dimensionare (5.20) rezultă:

$$A_1 \geq \frac{F}{\sigma_a - \gamma l_1} \quad (5.45)$$

Celelalte tronsoane sunt considerate încastrate la partea superioară. Pentru acestea greutatea tronsoanelor inferioare acționează ca forță concentrată. Prin urmare fiecare tronson va fi încărcat cu forța concentrată F , la care se adaugă greutatea tronsoanelor inferioare (considerată tot ca o forță concentrată) și încărcarea provenită din greutatea proprie a tronsonului (care este o forță distribuită).

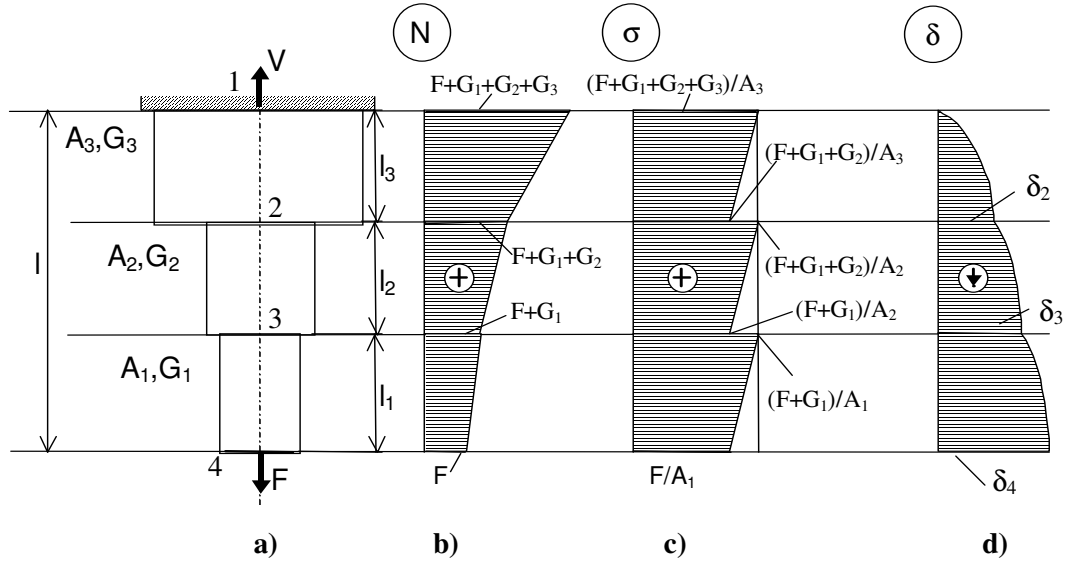


Figura 5.8.

Pentru cel de-al doilea tronson forța concentrată care acționează este:

$$F + G_1 = F + \gamma A_1 l_1 = A_1 \sigma_a \quad (5.46)$$

Dimensionarea tronsonului al doilea se face cu relația:

$$A_2 \geq \frac{A_1 \sigma_a}{\sigma_a - \gamma l_2} = \frac{F \sigma_a}{(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2)} \quad (5.47)$$

Pentru tronsonul i se poate stabili relația:

$$A_i \geq \frac{F \sigma_a^{i-1}}{(\sigma_a - \gamma l_1)(\sigma_a - \gamma l_2) \dots (\sigma_a - \gamma l_{i-1})} \quad (5.48)$$

Dacă cele n tronsoane au lungimi egale: $l_1 = l_2 = \dots = l_n = \frac{l}{n}$, relația (5.48)

devine:

$$A_i = \frac{F \sigma_a^{i-1}}{(\sigma_a - \gamma \frac{l}{n})^i} \quad (5.49)$$

Calculul deplasărilor se face pentru fiecare tronson în parte. Pentru tronsonul i deplasarea este:

$$\delta_i = \frac{l_i}{A_i E} \left(N + G_1 + G_2 + \dots + G_{i-1} + \frac{G_i}{2} \right) \quad (5.50)$$

Deplasarea totală se calculează prin însumarea deplasărilor porțiunilor de bară. Deplasările absolute în secțiunile 2, 3 și 4 (în încastrare deplasarea este nulă) sunt:

$$\begin{aligned}\delta_2 &= (F + G_1 + G_2 + \frac{G_3}{2}) \frac{l_3}{A_3 E} \\ \delta_3 &= \delta_2 + (F + G_1 + \frac{G_2}{2}) \frac{l_2}{A_2 E} \\ \delta_4 &= \delta_3 + (F + \frac{G_1}{2}) \frac{l_1}{A_1 E}\end{aligned}\tag{5.51}$$

Diagrama deplasărilor este reprezentată în figura 5.8d.

Observație

Lungimea de rupere sub greutate proprie a barei de egală rezistență este mai mare decât a barei de secțiune constantă.

5.6. Probleme static nedeterminate

Dacă numărul necunoscutelor este cel mult egal cu numărul ecuațiilor de echilibru, acestea pot fi calculate din ecuațiile staticii. Asemenea sisteme se numesc static determinate. Condiția pentru ca un sistem să fie static determinat poate fi scrisă: $NN \leq NE$. Unde: NN = numărul necunoscutelor (reacțiuni sau uneori eforturi), iar NE = numărul ecuațiilor staticii care nu sunt identic nule.

Dacă numărul necunoscutelor (reacțiuni sau eforturi) depășește pe cel al ecuațiilor de echilibru sistemul este static nedeterminat. La aceste sisteme: $NN > NE$. Diferența dintre numărul de necunoscute și numărul ecuațiilor de echilibru poartă numele de grad (ordin) de nedeterminare (GN). Pentru $GN = 1$ se spune că problema este simplu static nedeterminată; pentru $GN = 2$ dublu static nedeterminată, iar pentru $GN = n$, de n ori static nedeterminată.

La problemele static nedeterminate reacțiunile se determină în urma rezolvării unui sistem format din ecuațiile staticii completate cu un număr de

ecuații egal cu gradul de nedeterminare, obținute prin studiul deformației corpului.

Există două mari grupe de metode pentru determinarea ecuațiilor de deformații:

1. Metode geometrice (de compatibilitate a deformațiilor)

Aceste metode sunt în general mai simple și mai intuitive. Ele nu sunt recomandate însă pentru situații complexe, când dau un volum de lucru prea mare sau chiar rezultate eronate dacă nu se intuiește sensul corect al deformațiilor (de tracțiune sau compresiune).

2. Metode energetice

Aceste metode se bazează pe teoremele energetice expuse în Capitolul 4.

Vor fi prezentate mai multe metode de ridicare a nedeterminării. Pentru o aplicație dată ridicarea nedeterminării se poate face mai ușor printr-o metodă sau alta, după caz. De asemenea pentru a putea face mai ușor o comparație între metode, ele vor fi aplicate simultan pe același exemplu.

În scop didactic, problemele static nedeterminate au fost împărțite în următoarele categorii.

5.6.1. Sisteme cu bare în serie

Să se traseze diagramele N , σ și δ pentru bara cu tronsoane dublu încastrată din figura 5.9a. Să se dimensioneze bara știind că: $F = 150 \text{ kN}$, $l = 500 \text{ mm}$, $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Greutatea barei se neglijează.

Deoarece bara este solicitată numai de către forțe axiale reacțiunile din încastrări vor fi de asemenea forțe axiale. Pentru calculul acestor reacțiuni se poate scrie o singură ecuație de echilibru, de proiecție a forțelor pe direcția axei barei. Sensurile reacțiunilor se aleg arbitrar și ecuația se scrie astfel:

$$V_1 - 2F + F - V_2 = 0 \quad (5.162)$$

Deoarece $NN = 2$ și $NE = 1$ problema este simplu static nedeterminată.

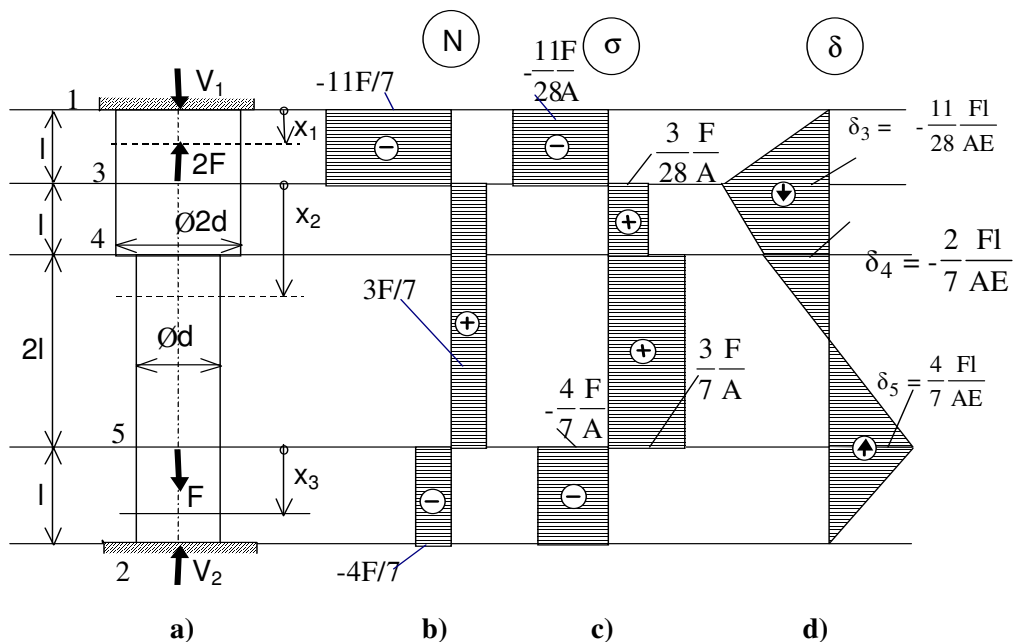


Figura 5.9

În continuare vor fi prezentate câteva metode pentru ridicarea nedeterminării.

1. Metode geometrice. Metoda deformației totale

Bara fiind încastrată capetele acesteia nu se deplasează și în consecință lungimea totală a barei rămâne constantă. Altfel spus alungirea totală a barei este nulă și se poate scrie:

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_{2-1} = \delta_{1-3} + \delta_{3-4} + \delta_{4-5} + \delta_{5-2} = 0 \quad (5.53)$$

Se notează cu A suprafața secțiunii transversale a tronsonului de bară de diametru d : $A = \frac{\pi d^2}{4}$. Pentru celalalt tronson aria secțiunii va fi: $\frac{\pi(2d)^2}{4} = 4A$.

Se explicitează alungirea totală a barei din relația (5.53) și se obține succesiv:

$$\delta_{\text{tot}} = \frac{N(x_1)l}{4AE} + \frac{N(x_2)l}{4AE} + \frac{N(x_2)2l}{AE} + \frac{N(x_3)l}{AE} - \frac{V_1}{4} + \frac{2F - V_1}{4} + 2(2F - V_1) + (2F - V_1 - F) = 0 \quad (5.54)$$

Din ultima relație rezultă:

$$V_1 = \frac{11}{7}F \quad (5.55)$$

Înlocuind în (5.52) se obține:

$$V_2 = \frac{4}{7}F \quad (5.56)$$

Diagramele N și σ sunt trasate în figurile 5.9b,c.

Se calculează deplasările și se trasează diagrama δ , reprezentată în figura 5.9d:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_2 = 0 \\ \delta_{3-1} &= \delta_3 = \frac{N(x_1)l}{4AE} = -\frac{11}{28} \frac{Fl}{AE} \\ \delta_{3-4} &= \frac{N(x_2)l}{4AE} = \frac{3}{28} \frac{Fl}{AE} \\ \delta_{4-1} &= \delta_4 = \delta_3 + \delta_{3-4} = -\frac{2}{7} \frac{Fl}{AE} \\ \delta_{4-5} &= \frac{N(x_2)2l}{AE} = \frac{6Fl}{7AE} \\ \delta_{5-1} &= \delta_5 = \delta_4 + \delta_{4-5} = \frac{4}{7} \frac{Fl}{AE} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Calculul de rezistență se face în secțiunea periculoasă. Din diagrama σ se alege valoarea maximă a tensiunii normale și se impune condiția:

$$\sigma_{\text{max}} = \left| \frac{4}{7} \frac{F}{A} \right| \leq \sigma_a \quad (5.58)$$

Se înlocuiește A și se determină d . Rezultă:

$$\begin{aligned}
d &\geq \sqrt{\frac{4F}{7\pi\sigma_a}} \\
d &\geq \sqrt{\frac{4 \cdot 15 \cdot 10^4}{7 \cdot \pi \cdot 150}} \\
d &\geq 13,49\text{mm}
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Se adoptă valoarea standardizată: $d = 16 \text{ mm}$.

2. Metode energetice

2.1. Aplicarea teoremei lui Castigliano

Se alege ca necunoscută static nedeterminată reacțiunea V_1 . Aplicând în raport cu aceasta teorema lui Castigliano sau teorema lui Menabrea se poate scrie:

$$\frac{\partial U}{\partial V_1} = 0 \tag{5.60}$$

unde energia potențială de deformare se determina cu relația:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{A_i E} \tag{5.61}$$

Ținând cont de cele două relații de mai sus, de forțele axiale, de aria secțiunii transversale și de lungimea pe fiecare regiune a barei se obține succesiv:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial V_1} &= \sum_i \frac{N_i l_i}{A_i E} \frac{\partial N_i}{\partial V_1} = 0 \\
\frac{N(x_1)l}{4AE} \frac{\partial N(x_1)}{\partial V_1} + \frac{N(x_2)l}{4AE} \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + \frac{N(x_2)2l}{AE} \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + \frac{N(x_3)l}{AE} \frac{\partial N(x_3)}{\partial V_1} &= 0 \tag{5.62} \\
\frac{1}{4} N(x_1) \frac{\partial N(x_1)}{\partial V_1} + \frac{1}{4} N(x_2) \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + 2N(x_2) \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} + N(x_3) \frac{\partial N(x_3)}{\partial V_1} &= 0
\end{aligned}$$

Expresiile forțelor axiale și derivatele acestora sunt:

$$N(x_1) = -V_1; \quad \frac{\partial N(x_1)}{\partial V_1} = -1 \tag{5.63}$$

$$N(x_2) = 2F - V_1; \quad \frac{\partial N(x_2)}{\partial V_1} = -1 \tag{5.64}$$

$$N(x_3) = 2F - F - V_1; \quad \frac{\partial N(x_3)}{\partial V_1} = -1 \quad (5.65)$$

Înlocuind ultimele trei relații în ultima formă a relației (5.62) rezultă:

$$\frac{1}{4}(-V_1)(-1) + \frac{1}{4}(2F - V_1)(-1) + 2(2F - V_1)(-1) + (F - V_1)(-1) = 0 \quad (5.617)$$

de unde se obține:

$$V_1 = \frac{11}{7}F \quad (5.67)$$

Reacțiunea V_2 se obține înlocuind V_1 în ecuația de echilibru (5.52).

2.2. Metoda eforturilor

Deoarece problema este simplu static nedeterminată sistemul de ecuații canonice (4.46) se reduce la o singură ecuație:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (5.68)$$

Din ecuația (5.68) rezultă:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (5.69)$$

Pentru determinarea coeficienților de influență δ_{ij} trebuie să se adopte mai întâi sistemul de bază. Pentru o problemă simplu static nedeterminată sistemul de bază (care este un sistem static determinat) se obține prin înlăturarea unei legături care preia un singur grad de libertate. Sistemul de bază nu este unic. Astfel, pentru aplicația studiată sistemul de bază se poate forma prin îndepărtarea reazemului 1 sau prin îndepărtarea reazemului 2. Se alege a doua variantă și se ajunge la sistemul de bază din figura 5.10b.

Se studiază sistemul de bază în următoarele în două situații:

- încărcat numai cu sarcinile exterioare ($X_1 = 0$) ca în figura 5.10c;
- încărcat numai cu $X_1 = 1$ și sarcinile exterioare nule (figura 5.10d).

Diagramele de eforturi axiale corespunzătoare celor două situații sunt notate convențional N_0 și n_1 . Pentru calculul coeficientului δ_{10} se utilizează

eforturile $N_0(x_i)$ și $n_1(x_i)$ sau diagramele N_0 și n_1 (pentru metoda Mohr-Vereșceaghin), iar pentru δ_{11} se folosește doar efortul $n_1(x_i)$ sau diagrama n_1 .

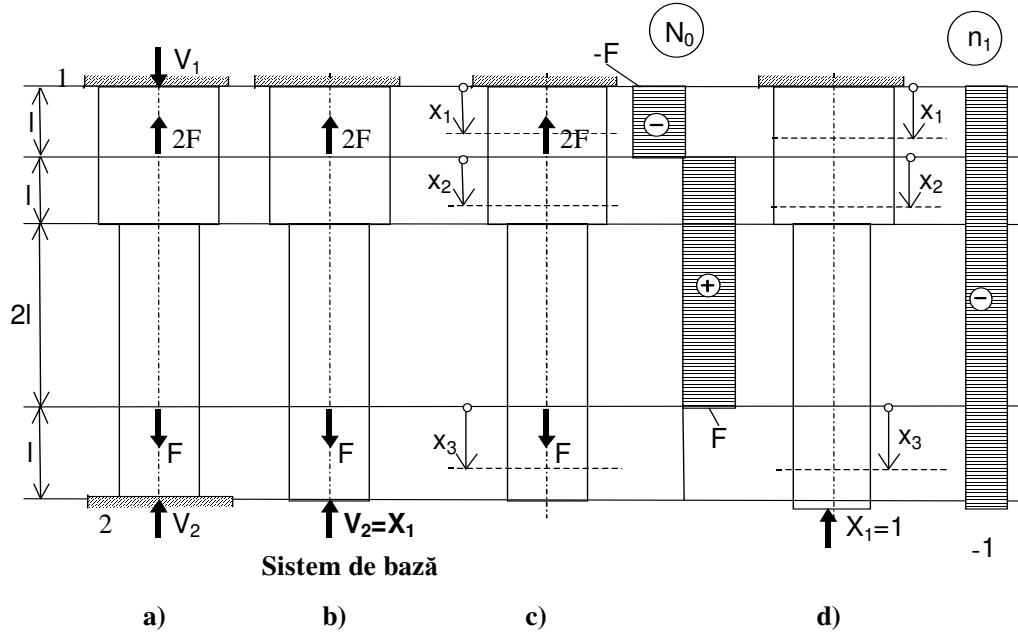


Figura 5.10

Astfel:

$$\delta_{10} = \frac{1}{4AE} \int_0^l N_0(x_1) n_1(x_1) dx_1 + \frac{1}{4AE} \int_0^l N_0(x_2) n_1(x_2) dx_2 + \frac{1}{AE} \int_0^{2l} N_0(x_2) n_1(x_2) dx_2 + \frac{1}{AE} \int_0^l N_0(x_3) n_1(x_3) dx_3 \quad (5.70)$$

respectiv:

$$\delta_{11} = \frac{1}{4AE} \int_0^l n_1^2(x_1) dx_1 + \frac{1}{4AE} \int_0^l n_1^2(x_2) dx_2 + \frac{1}{AE} \int_0^{2l} n_1^2(x_2) dx_2 + \frac{1}{AE} \int_0^l n_1^2(x_3) dx_3 \quad (5.71)$$

Înlocuind, rezultă succesiv:

$$\delta_{10} = \frac{1}{4AE} \int_0^1 (-F)(-1) dx_1 + \frac{1}{4AE} \int_0^1 F(-1) dx_2 + \frac{1}{AE} \int_0^{2l} F(-1) dx_2$$

$$\delta_{10} = -2 \frac{Fl}{AE}$$
(5.72)

respectiv

$$\delta_{11} = \frac{1}{4AE} \int_0^{2l} (-1)^2 dx + \frac{1}{AE} \int_0^{3l} (-1)^2 dx = \frac{7}{2} \frac{l}{AE}$$
(5.73)

Înlocuind coeficienții δ_{10} și δ_{11} în relația (5.69) se obține:

$$X_1 = 2 \frac{Fl}{AE} - \frac{2}{7} \frac{AE}{l}$$

$$X_1 = \frac{4}{7} F = V_2$$
(5.74)

Reacțiunea V_1 poate fi obținută din ecuația de echilibru (5.52).

5.6.2. Sisteme cu bare în paralel (bare cu secțiune neomogenă)

În exemplele studiate până în prezent s-a considerat că secțiunea barei este omogenă, iar tensiunile sunt uniform repartizate pe ea. În practică pot fi întâlnite adesea bare cu secțiuni neomogene (de exemplu cablurile electrice pentru rețele de înaltă tensiune care sunt formate dintr-un cablu central din oțel înconjurat de cabluri conductoare, materiale armate cu fire lungi - beton armat, compozite cu matrice din polimeri, etc.). În acest caz se admite că elementele componente, confecționate din materiale diferite, sunt dispuse simetric în jurul centrului de greutate al secțiunii transversale. Calculul de rezistență al unei astfel de bare, solicitată la întindere sau la compresiune, necesită determinarea modului de repartitie a forței axiale pe elementele componente ale secțiunii.

În figura 5.11 se consideră o bară dreaptă cu secțiune neomogenă solicitată la compresiune, mai exact o tijă (corpul 1) și o bușă (corpul 2) de aceeași lungime l , confecționate din materiale diferite și fixate între două discuri rigide.

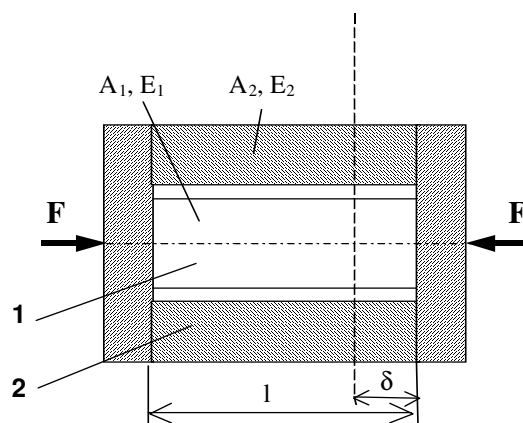


Figura 5.11

Fiecare din cele două corpuri, luat separat formează o bară dreaptă, cu ariile secțiunilor transversale A_1 , A_2 și modulele de elasticitate E_1 , E_2 cunoscute. Se pune problema determinării eforturilor (N_1 și N_2) și tensiunilor din bare. Fiind forțe coliniare din statică se poate reține o singură ecuație de echilibru:

$$N_1 + N_2 = F \quad (5.75)$$

Deoarece $NN = 2$ și $NE = 1$ problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se folosește metoda geometrică. Presupunând discul din stânga fix, relația pentru ridicarea nedeterminării exprimă condiția că la echilibru deformațiile celor două corpuri sunt egale (vezi figura 5.11). Se poate scrie:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_1 = \delta_2 \\ \text{dar} \quad \delta_1 &= \frac{N_1 l}{A_1 E_1}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{A_2 E_2} \\ \text{prin urmare} \quad \frac{N_2 l}{A_2 E_2} &= \frac{N_1 l}{A_1 E_1} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Se ajunge la un sistem format din ecuațiile (5.75) și (5.76). În urma rezolvării sistemului se obțin eforturile N_1 și N_2 care nu depind de lungimea l :

$$H_1 = \frac{F}{1 + \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1}} \quad H_2 = \frac{F}{1 + \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2}} \quad (5.77)$$

Tensiunile din cele două bare sunt:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1}} \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2}} \quad (5.78)$$

Relațiile obținute sunt aplicabile și la calculul la întindere.

Dimensionarea ambelor corpuri din condițiile de rezistență nu este posibilă. Se va dimensiona numai unul din corpuri, urmând ca pentru celălalt să se facă o verificare. Dacă, de exemplu, se dimensionează corpul 1, vor fi satisfăcute inegalitățile:

$$\sigma_1 \leq \sigma_{a1}; \quad \sigma_2 < \sigma_{a2} \quad (5.79)$$

Se sugerează rezolvarea problemei prin metoda eforturilor.

5.6.3. Sisteme de bare paralele

Se consideră o bară dreaptă rigidă, AB, în poziție orizontală încărcată cu forța F (figura 5.12). Bara orizontală este susținută de către trei bare flexibile verticale articulate la capete. Se pune problema de a se determina eforturile din bare.

Deoarece articulațiile nu transmit moment, barele vor fi supuse numai la solicitări axiale. Se pot scrie următoarele două ecuații de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum V = 0 &\Rightarrow N_1 + N_2 - F + N_3 = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 &\Rightarrow N_3 3l - F \frac{7l}{4} + N_2 l = 0 \end{aligned} \quad (5.80)$$

Problema are trei necunoscute, deci este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se vor utiliza metoda geometrică cât și metoda eforturilor.

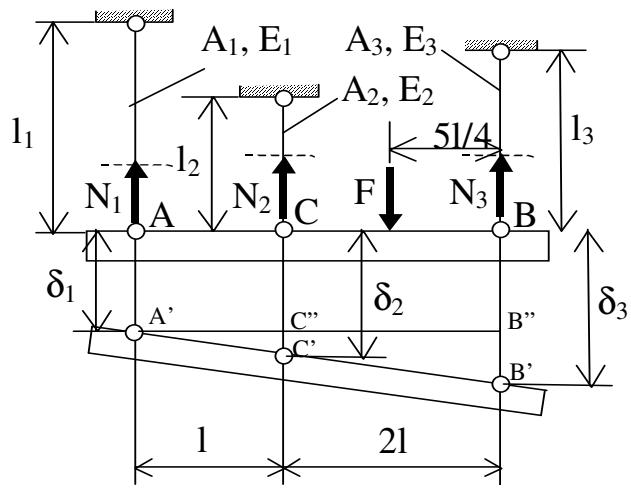


Figura 5.12

Metoda geometrică

Bara orizontală fiind indeformabilă, sub acțiunea forței se deformează numai barele verticale. Se figurează sistemul în stare deformată (figura 5.12). Din triunghiurile asemenea A'B'B'' și A'C'C'' se poate scrie relația:

$$\frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_3 - \delta_1} = \frac{1}{3l} = \frac{1}{3} \quad (5.81)$$

Explicitând lungirile celor trei bare și înlocuind în relația (5.81) rezultă:

$$\frac{N_2 l_2}{A_2 E_2} - \frac{N_1 l_1}{A_1 E_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{N_3 l_3}{A_3 E_3} - \frac{N_1 l_1}{A_1 E_1} \right) \quad (5.82)$$

Rezolvând sistemul format din această ecuație și din cele două ecuații de echilibru se determină eforturile N_1 , N_2 și N_3 .

Metoda eforturilor

Se alege sistemul de bază din figura 5.13. Se consideră sistemul de bază încărcat numai cu sarcina F (figura 5.14) și respectiv cu $X_1 = 1$ (figura 5.15).

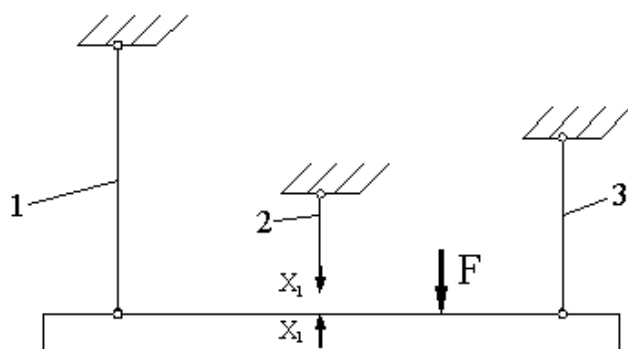


Figura 5.13

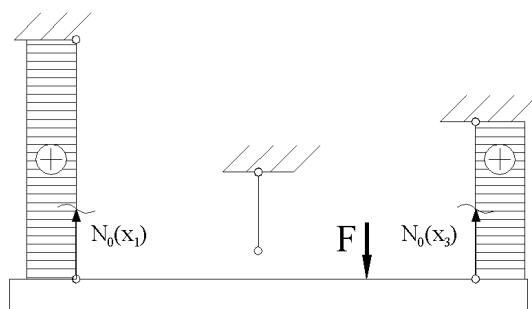


Figura 5.14

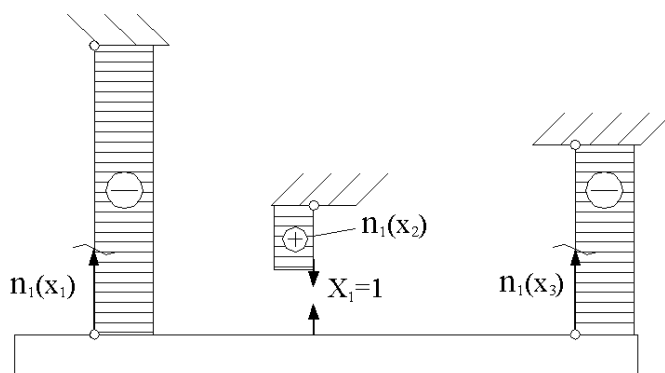


Figura 5.15

Eforturile din barele sistemului de bază, pentru cele două variante de încărcare, determinate din condițiile de echilibru, se notează cu $N_0^{(i)} = N_0(x_i)$ și $n_1^{(i)} = n_1(x_i)$ pentru bara i . Expresiile acestor eforturi sunt:

$$N_0(x_1) = \frac{5}{12}F; \quad N_0(x_2) = 0; \quad N_0(x_3) = \frac{7}{12}F \quad (5.83)$$

$$n_1(x_1) = -\frac{2}{3}; \quad n_1(x_2) = 1; \quad n_1(x_3) = -\frac{1}{3} \quad (5.84)$$

Coeficienții δ_{ij} din ecuația canonică:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (5.85)$$

se determină cu ajutorul relațiilor:

$$\delta_{10} = \sum_{i=1}^3 \frac{N_0(x_i)n_1(x_i)l_i}{A_iE_i}; \quad \delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{[n_1(x_i)]^2 l_i}{A_iE_i}$$

prin urmare

$$\delta_{10} = \frac{1}{A_1E_1} \left(\frac{5}{12}F \right) \left(\frac{2}{3} \right) l_1 + \frac{1}{A_3E_3} \left(\frac{7}{12}F \right) \left(-\frac{1}{3} \right) l_3 \quad (5.86)$$

respectiv

$$\delta_{11} = \frac{1}{A_1E_1} \left(-\frac{2}{3} \right)^2 l_1 + \frac{1}{A_2E_2} 1^2 l_2 + \frac{1}{A_3E_3} \left(-\frac{1}{3} \right)^2 l_3$$

Din relațiile (5.85) și (5.86) se determină necunoscuta $X_1 = N_2$.

5.6.4. Sisteme cu bare articulate concurente

Se consideră un sistem format din trei bare articulate (figura 5.16a) solicitat de o forță verticală F , aplicată în punctul B . Se vor determina eforturile pentru cazul prezentat. Lungimea unei bare oarecare este l_i , modulul de rigiditate A_iE_i , iar unghiul de înclinare față de verticală α_i .

Pentru determinarea eforturilor din bare pot fi scrise numai două ecuații de echilibru:

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0 &\Rightarrow N_1 \sin \alpha_1 = N_3 \sin \alpha_2 \\ \sum Y_i = 0 &\Rightarrow N_1 \cos \alpha_1 + N_2 + N_3 \cos \alpha_3 = F \end{aligned} \quad (5.87)$$

Sistemul este simplu static nedeterminat ($NN = 3$, $NE = 2$),. Se prezintă următoarele metode de ridicare a nedeterminării.

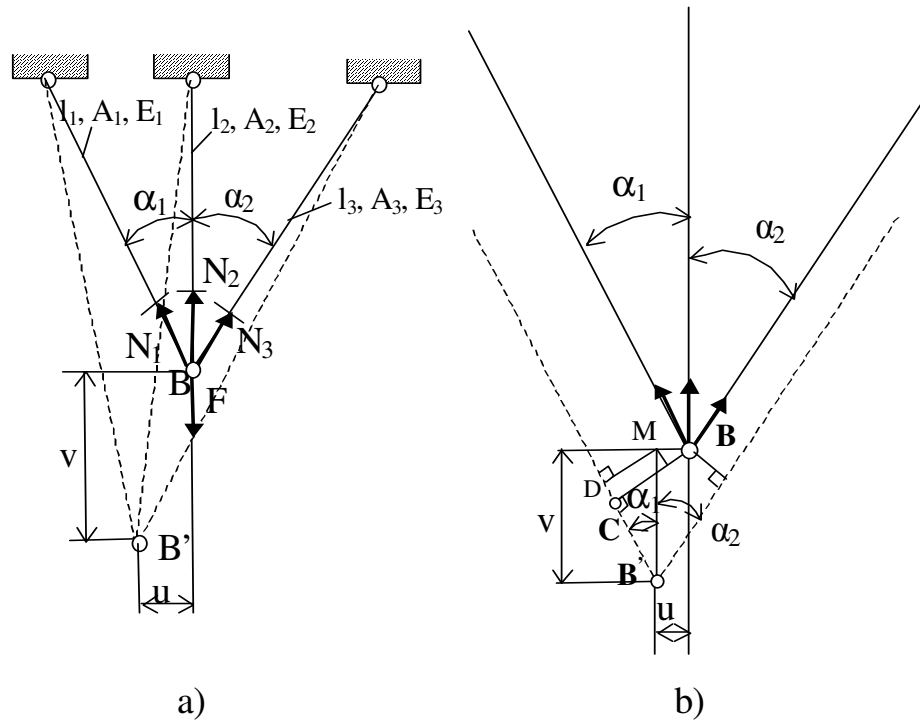


Figura 5.16

Metoda geometrică

Pentru ridicarea nedeterminării se examinează starea deformată a sistemului. După solicitare nodul B se deplasează în B', deplasându-se vertical cu v și orizontal cu u . Deoarece deformațiile barelor sunt mici în raport cu lungimea acestora, variațiile unghiurilor nu influențează semnificativ valorile funcțiilor trigonometrice. În aceste condiții, se poate considera că unghiurilor își păstrează valorile și pentru sistemul în stare deformată (figura 5.16b). Se duce perpendiculara din B pe direcția barei 1 deformate. Se poate considera că:

$$[B'C] \approx \delta_1 \quad (5.88)$$

Pe baza figurii 5.16b se pot scrie relațiile:

$$[B'C] = [B'D] - [DC] \quad (5.89)$$

dar

$$[B'D] = [B'M] \cdot \cos \alpha_1 = v \cdot \cos \alpha_1$$

$$[DC] = [BM] \cdot \sin \alpha_1 = u \cdot \sin \alpha_1$$

Înlocuind în relațiile (5.88), (5.89) se obține:

$$\delta_1 = v \cdot \cos \alpha_1 - u \cdot \sin \alpha_1 \quad (5.90)$$

Pe de altă parte se știe că:

$$\delta_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E_1} \quad (5.91)$$

O relație asemănătoare poate fi scrisă și pentru bara 3. Aceste ecuații, rezultate din studiul geometric al deformațiilor împreună cu cele de echilibru, (relațiile 5.87) formează un sistem din rezolvarea căruia rezultă N_1 , N_2 , N_3 , u și v .

Observații:

1. Metoda prezentată poate da rezultate eronate dacă nu se intuiește sensul corect al deformațiilor din bare (de întindere sau de compresiune).

2. Metoda prezentată este cunoscută ca metoda geometrică aproximativă. În literatură este prezentată și o metoda geometrică exactă (cu rezultate bune în cazul deformațiilor mari cum ar fi barele sollicitate în domeniul elastoplastic sau confecționate din materiale cu modulul de elasticitate scăzut). Metoda geometrică exactă este însă extrem de laborioasă și utilizarea ei nu este justificată pentru cazul deformațiilor mici deoarece, deoarece în asemenea situații, metodele aproximative (geometrice sau energetice) dau erori neglijabile.

Un caz particular al problemei discutate anterior îl reprezintă sistemul simetric, prezentat în figura 5.17, la care barele au aceeași secțiune și sunt confecționate din același material, iar $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. În acest caz deplasarea punctului B are loc pe axa de simetrie (figura 5.17).

Datorită simetriei se pot scrie următoarele relații:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 = N; \\ \delta_1 &= \delta_3 = \delta; \\ l_1 &= l_3 = \frac{l}{\cos \alpha} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Prima relație poate fi obținută și din ecuația de proiecție a forțelor pe orizontală.

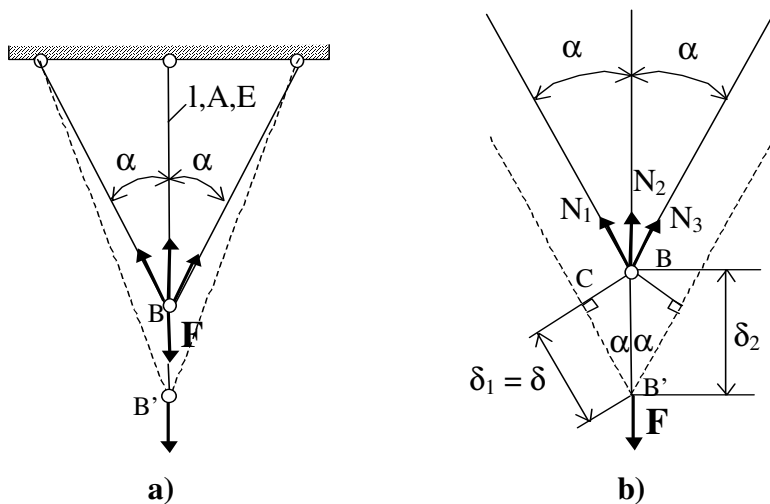


Figura 5.17

La metoda aproximativă ecuațiile de echilibru se scriu pentru sistemul nedeformat. Pentru sistemul din figura 5.17 ecuația de proiecție a forțelor pe verticală are forma:

$$2N \cos \alpha + N_2 = F \quad (5.93)$$

Din figura 5.17b se obține:

$$\delta_2 = \frac{\delta}{\cos \alpha} \quad (5.94)$$

Între eforturi și deformații se pot scrie următoarele relații:

$$\delta = \frac{N}{AE} \frac{l}{\cos \alpha}; \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{AE} \quad (5.95)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații format din relațiile (5.93-5.95) și ținând cont și de condițiile (5.92) se determină valorile eforturilor N_1 , N_2 , N_3 .

Metoda eforturilor

Se adoptă sistemul de bază din figura 5.18a (dacă X_1 este cunoscut, sistemul este static determinat). Se observă că de fapt $X_1 = N_2$.

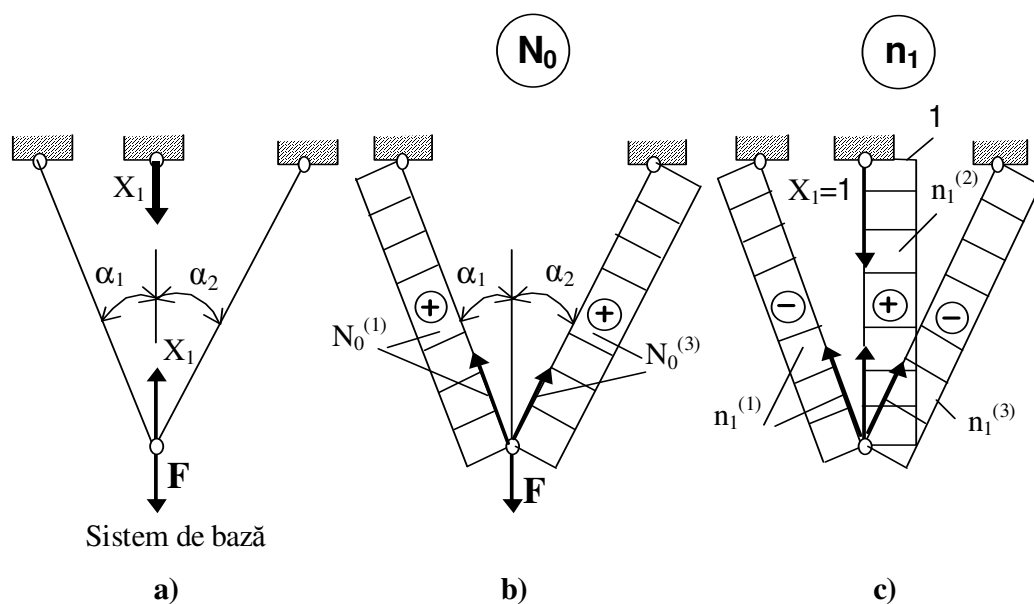


Figura 5.18

Pentru nedeterminarea simplă este suficientă o singură ecuație canonică:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0 \quad (5.96)$$

Se studiază sistemul de bază în două situații:

- încărcat numai cu sarcina F ($X_1 = 0$), vezi figura 5.18b;
- încărcat numai cu $X_1 = 1$ ($F = 0$), vezi figura 5.18c.

Pentru sistemele din figurile 5.18b și 5.18c se scriu cele două ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned} N_0^{(1)} \sin \alpha_1 &= N_0^{(3)} \sin \alpha_2 \\ N_0^{(1)} \cos \alpha_1 + N_0^{(3)} \cos \alpha_2 &= F \end{aligned} \quad (5.97)$$

respectiv

$$\begin{aligned} n_0^{(1)} \sin \alpha_1 &= n_0^{(3)} \sin \alpha_2 \\ n_1^{(1)} \cos \alpha_1 + n_1^{(3)} \cos \alpha_2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.98)$$

și se determină eforturile:

$$N_0^{(1)} = \frac{F \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad N_0^{(3)} = \frac{F \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (5.99)$$

$$n_1^{(1)} = \frac{-\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad n_1^{(3)} = \frac{-\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (5.100)$$

Se știe că pentru determinarea coeficienților δ_{ij} se utilizează relația:

$$\delta_{ij} = \sum_k \frac{n_i^{(k)} n_j^{(k)} l_k}{A_k E_k} \quad (5.101)$$

Prin urmare, pentru determinarea lui δ_{11} se folosesc de două ori eforturile n_1 și se obține:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \frac{1}{A_1 E_1} \left(\frac{-\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \frac{1}{\cos \alpha_1} + \\ & + \frac{1}{A_2 E_2} l^2 + \frac{1}{A_3 E_3} \left(\frac{-\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \frac{1}{\cos \alpha_2} \end{aligned} \quad (5.102)$$

La determinarea lui δ_{10} se folosesc eforturile N_0 și n_1 . Deoarece $N_0^{(2)} = 0$ rezultă:

$$\delta_{10} = \frac{1}{A_1 E_1} N_0^{(1)} n_1^{(1)} l_1 + \frac{1}{A_3 E_3} N_0^{(3)} n_1^{(3)} l_3 \quad (5.103)$$

Înlocuind, se obține:

$$\delta_{10} = \frac{1}{A_1 E_1} \left(-\frac{F \sin^2 \alpha_2}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right) \frac{1}{\cos \alpha_1} - \frac{1}{A_3 E_3} \left(-\frac{F \sin^2 \alpha_1}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right) \frac{1}{\cos \alpha_2} \quad (5.104)$$

Cunoscând coeficienții δ_{10} și δ_{11} se calculează X_1 din ecuația (5.96):

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (5.105)$$

Odată calculată necunoscuta X_1 practic a fost ridicată nedeterminarea problemei. Dar $X_1 = N_2$, iar celelalte două eforturi pot fi obținute din ecuațiile de echilibru (5.87) sau cu relația:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_0^{(1)} + n_1^{(1)} X_1 \\ N_3 &= N_0^{(3)} + n_1^{(3)} X_3 \end{aligned} \quad (5.106)$$

5.6.5. Sisteme static nedeterminate supuse la variații de temperatură

Dacă o bară dreaptă se poate dilata liber, atunci la o creștere a temperaturii ΔT , ea se alungește cu cantitatea:

$$\Delta l^t = \alpha \cdot l \cdot \Delta T \quad (5.107)$$

unde: α – coeficientul de dilatare termică liniară;

ΔT – variația de temperatură;

l – lungimea barei.

Dacă dilatarea termică este împiedicată (de exemplu prin fixarea barei între doi pereți rigizi) apar tensiuni ce pot atinge valori importante.

La sisteme static nedeterminate supuse la variații de temperatură pentru ridicarea nedeterminării se recomandă metoda îndepărtării reazemului. Se exemplifică în continuare aplicarea acestei metode pe următoarele exemple.

Aplicații

1. Se consideră sistemul format din două bare din figura 5.19. La o creștere a temperaturii cu ΔT , deoarece deformația datorită temperaturii este împiedicată, în cele două reazeme iau naștere reacțiuni egale cu H . Ambele bare vor fi supuse la compresiune cu efortul $N = -H$. Problema este simplu static nedeterminată. Pentru ridicarea nedeterminării se îndepartează reazemul din dreapta. Lungirea termică liberă a barei va fi:

$$\Delta l^t = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) \cdot \Delta T \quad (5.108)$$

Comprimând sistemul inițial cu forța H , acesta va suferi o comprimare mecanică cu cantitatea:

$$\Delta l^m = \frac{H l_1}{A E_1} + \frac{H l_2}{A E_2} \quad (5.109)$$

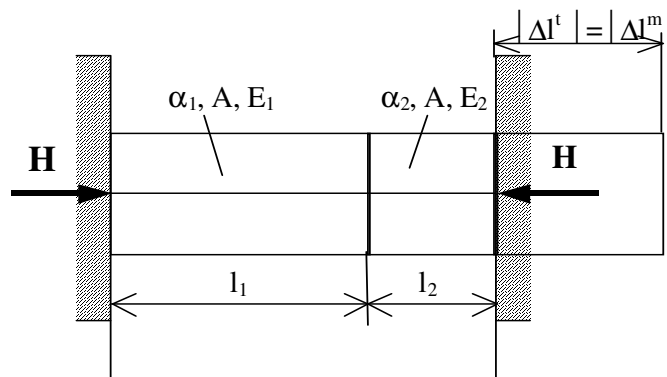


Figura 5.19

Deoarece reazemul este fix, cele două deplasări vor fi egale în modul și prin urmare:

$$(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) \Delta T = \frac{H}{A} \left(\frac{E_2 l_1 + E_1 l_2}{E_1 E_2} \right) \quad (5.110)$$

Din această ecuație se determină H:

$$H = \frac{\Delta T (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) A}{\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}} \quad (5.111)$$

Tensiunea normală de compresiune este:

$$\sigma = \frac{\Delta T (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}{\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}} \quad (5.112)$$

Valoarea tensiunii este destul de mare și depinde numai de materialul barei și de diferența de temperatură. Deplasarea unui punct de pe axa barei se calculează ca diferență dintre deformația termică și cea mecanică.

2. În figura 5.20 cele două bare sunt sudate la capete de două discuri rigide. Ansamblul este supus unei creșteri de temperatură ΔT .

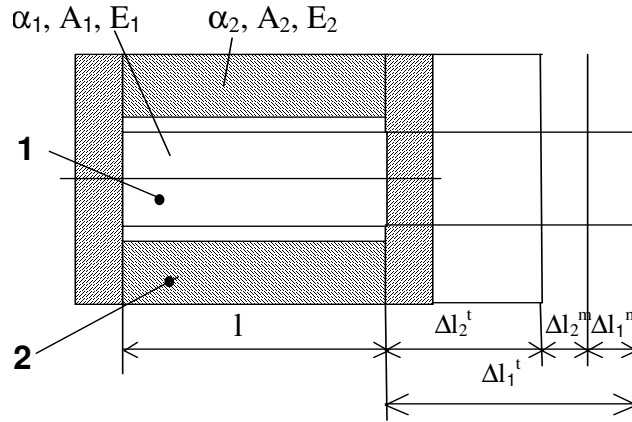


Figura 5.20

Din statică se poate scrie $N_1 = N_2 = N$. Prin urmare problema este simplu static nedeterminată. Se îndepartează discul rigid din dreapta ceea ce permite dilatarea liberă a barelor. Lungirile termice se calculează cu următoarele relații:

$$\Delta l_1^t = \alpha_1 l \Delta T; \quad \Delta l_2^t = \alpha_2 l \Delta T \quad (5.113)$$

Pentru cazul în care $\alpha_1 > \alpha_2$ problema este prezentată în figura 5.20. Prezența discului din dreapta impune ca, în final, cele două bare să aibă aceeași lungime. Pentru a realiza acest lucru, bara 1 va fi comprimată, iar bara 2 va fi trăcționată cu:

$$\Delta l_1^m = \frac{Nl}{A_1 E_1}; \quad \Delta l_2^m = \frac{Nl}{A_2 E_2} \quad (5.114)$$

Din figura 5.20 se poate stabili următoarea relație între deplasări:

$$\Delta l_1^t = \Delta l_2^t + \Delta l_2^m + |\Delta l_1^m| \quad (5.115)$$

Înlocuind în ultima egalitate relațiile (5.113) și (5.114) rezultă:

$$(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T = N \frac{A_1 E_1 + A_2 E_2}{A_1 E_1 A_2 E_2} \quad (5.116)$$

Din această ecuație se determină efortul N și apoi se calculează tensiunile din cele două bare:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2} \quad (5.117)$$

În cazul unor sisteme de bare supuse simultan la acțiunea sarcinilor și a variațiilor de temperatură tensiunile produse de aceste variații se suprapun peste cele introduse de către sarcini. În acest caz tensiunile pot fi determinate prin suprapunerea efectelor. În acest scop se vor determina separat tensiunile din bara cu sarcini și $\Delta T = 0$ și apoi din bara fără sarcini, supusă numai la variații de temperatură. Tensiunea rezultantă într-o secțiune se obține prin însumarea algebrică a tensiunilor din cele două situații analizate separat. Similar se poate proceda pentru eforturi și deplasări. Problema poate fi rezolvată de asemenea cu ajutorul ecuațiilor canonice ale metodei eforturilor care țin cont de efectul termic.

CAPITOLUL 6

CALCULUL CONVENȚIONAL AL BARELOR LA FORFECARE

6.1. Introducere

Atunci când în secțiunea transversală a unui corp acționează numai o forță tăietoare (T_z sau T_y), acesta este solicitat la ***forfecare (tăiere) pură*** (vezi tabelul 2.2). În secțiune barei apar în acest caz numai ***tensiuni tangențiale***. În practică este însă extrem de dificil să se realizeze o solicitare de forfecare pură, de cele mai multe ori forfecarea fiind însoțită de încovoiere

În laborator pentru realizarea încercării la forfecare pură (*metoda Iosipescu*) se utilizează epruvete crestate supuse la încovoiere (vezi figura 3.13). Chiar și în acest caz numai în secțiunea slăbită (crestată) a epruvetelor se realizează moment nul și o forță tăietoare, care produce forfecare.

Forfecarea unei bare poate fi produsă de către două forțe *coliniare, normale* pe axa acesteia, *egale și de sens contrar*, așa cum este prezentat în

figura 6.1, cele două forțe putând fi materializate, de exemplu, prin fălcile unei foarfeci.

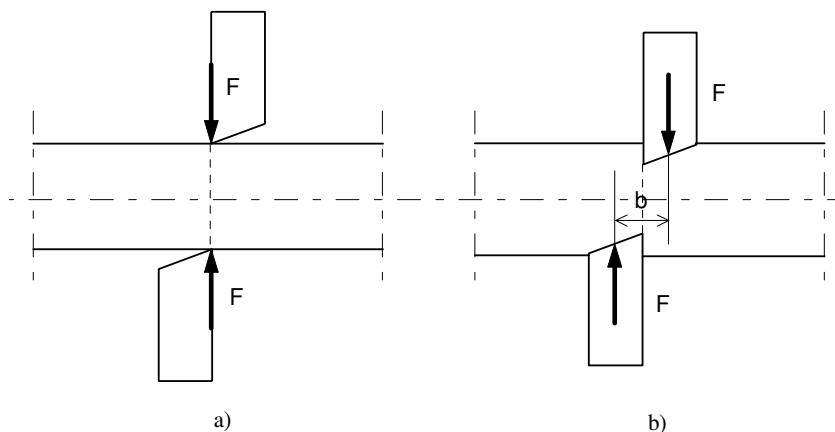


Figura 6.1

Practic sunt extrem de greu de realizat condițiile enunțate anterior. Chiar dacă forțele ar fi inițial coliniare (și deci brațul cuplului ar fi nul), pe măsură ce fălcile pătrund în material, asupra lor acționează forțe distribuite, iar pentru rezultantele acestora brațul crește, producându-se în consecință și încovoiere (figura 6.1b). În practică însă fălcile nu sunt coliniare ci ușor decalate, trecând una pe lângă cealaltă. Brațul fiind mic, tensiunile normale produse de încovoiere vor fi neglijate.

În acest capitol sunt luate în considerație situațiile în care tensiunile normale, provenite din încovoiere, sunt neglijabile în raport cu cele tangențiale, produse de forfecare și în care calculul convențional dă rezultate satisfăcătoare. Repartiția tensiunilor tangențiale pe secțiunea barelor supuse la încovoiere simplă va fi studiată în *Capitolul 8*.

6.2. Calculul tensiunii tangențiale

Pentru calculul convențional al barelor la forfecare se presupune că tensiunile tangențiale sunt uniform distribuite pe secțiune. Această ipoteză se

verifică în practică numai pentru forfecarea pieselor de grosime mică (table, șuruburi mici, nituri, știfturi, pene, etc.).

Pe suprafața unei bare solicitată la forfecare se trasează o rețea de pătrate. Bara este supusă la forfecare tehnică (produsă de forțe normale la axa barei, dar care nu sunt perfect coliniare). Se observă că se deformează numai volumul de material cuprins între forțe și că pe această porțiune de bară ochiurile rețelei devin romburi (unghiurile drepte au devenit ascuțite sau obtuze), suportând numai deformații unghiulare (lunecări) produse de tensiunile tangențiale (vezi figura 6.2b).

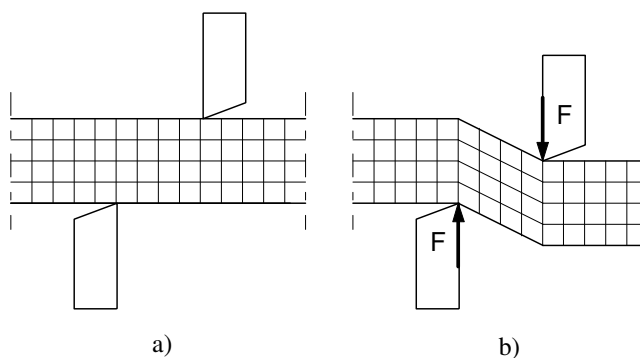


Figura 6.2

După cum s-a arătat mai sus, în secțiunea barei forfecate apar forțe tăietoare și tensiuni tangențiale. În aceste condiții, din cele șase ecuații de echivalență rămâne una singură, *ecuația (2.17)*:

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad (6.1)$$

Pentru a putea rezolva integrala trebuie cunoscută legea de distribuție a tensiunii tangențiale τ_{xy} pe suprafața A . Ținând cont de faptul că pentru *calculul convențional* la forfecare s-au considerat tensiunile tangențiale uniform distribuite pe secțiune, deci $\tau_{xy} = \text{const.}$, *relația (6.1)* devine:

$$T_y = \tau_{xy} \int_A dA \quad (6.2)$$

sau

$$T_y = \tau_{xy} A \quad (6.3)$$

de unde

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \quad (6.4)$$

Observație:

1. Relația (6.4) rămâne valabilă și pentru forfecarea pe direcția axei Oz , dacă se înlocuiește indicele y cu z .

Relația (6.4) permite rezolvarea următoarele trei categorii de probleme:

- *calculul de dimensionare* (se determină aria secțiunii transversale):

$$A_{nec} = \frac{T}{\tau_a} \quad (6.5)$$

- *calculul de verificare* (se determină tensiunea tangențială maximă care se compară cu tensiunea admisibilă sau cu cea de rupere). Bara rezistă dacă:

$$\tau_{ef} = \frac{T}{A} \leq \tau_a \quad (6.6)$$

- *calculul forței tăietoare capabile* sau a celei *de rupere* prin forfecare:

$$T_{cap} = A\tau_a \quad \text{respectiv} \quad T_r = A\tau_r \quad (6.7)$$

Aplicație

Să se determine forța de apăsare a poansonului necesară ștanțării unor discuri cu diametrul $d = 40$ mm. Grosimea tablei este de $t = 4$ mm, iar tensiunea de rupere a materialului este $\sigma_r = 215$ MPa (vezi figura 6.3).

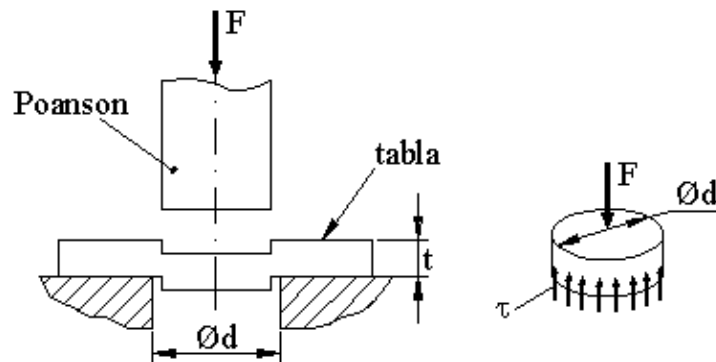


Figura 6.2

Forța F ce ia naștere în poanson în timpul operației de ștanțare se calculează cu relația:

$$F = T_r = \tau_r A$$

Aria de forfecare este aria laterală a discului, adică:

$$A = \pi d t$$

Prin urmare:

$$F = \tau_r \pi d t$$

sau înlocuind valorile date rezultă:

$$F = 215 \pi d t = 108 \text{ kN}$$

În realitate, forța care acționează asupra poansonului trebuie să fie mai mare decât această valoare, deoarece la calculul acesteia s-au neglijat frecările dintre poanson și tablă, din mecanismele ștanței, energia consumată de către mecanismele de înaintare și fixare a tablei, de extracție a discului, etc.

6.3. Energia potențială de deformare

Deoarece volumul de material deformat este mic (vezi figura 6.2) și energia potențială înmagazinată va fi mică, comparativ cu alte solicitări. Expresia energiei de deformare înmagazinată de către bara supusă la forfecare poate fi determinată cu relația (4.16) în care tensiunea tangențială este dată de relația (6.4). Se obține succesiv:

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \frac{1}{2G} \int_0^l \left(\frac{T}{A} \right)^2 dx \int_A dA \quad (6.8)$$

$$U = \int_0^l \frac{T^2}{2GA} dx \quad (6.9)$$

Pentru $T = \text{const.}$ se obține

$$U = \frac{T^2 l}{2GA} \quad (6.10)$$

unde: l - este lungimea porțiunii de bară deformată;

G – modulul de elasticitate transversală;

A – aria secțiunii transversale.

GA – modulul de rigiditate la forfecare a secțiunii transversale.

Fiind mică, în comparație cu cea de la alte solicitări, energia potențială de deformare la forfecare va fi uzual neglijată.

6.4. Calculul convențional al îmbinărilor

Îmbinările se pot grupa în două categorii:

- îmbinări demontabile (cu șuruburi, buloane, etc);
- îmbinări nedemontabile (prin nituire, sudură, îmbinări adezive).

În acest capitol se va prezenta, pe exemple, calculul de rezistență al îmbinărilor. Elementele componente ale îmbinărilor sunt solicate la forfecare, la întindere (compresiune) și la strivire.

6.4.1. Îmbinări cu șuruburi sau nituri

În practica se pot întâlni îmbinări cu nituri cu simplă suprapunere și un rând de nituri; cu simplă suprapunere și mai multe rânduri de nituri; cu dublă suprapunere, etc. Similar și pentru șuruburi.

Pentru aceste tipuri de îmbinări șurubul, respectiv nitul este sollicitat la forfecare în planul de separație dintre table. Pentru *calculul convențional la*

forfecare al acestor îmbinări se iau în considerație următoarele ipoteze simplificatoare:

- sarcina se împarte egal pe toate niturile (șuruburile). În realitate, niturile de pe rândurile exterioare sunt cele mai sollicitate. După depășirea limitei de curgere însă, repartiția încărcării se uniformizează;

- se neglijează frecarea dintre table;

- tija nitului (șurubului) este sollicitată numai la forfecare (se neglijează încovoierea și tracțiunea);

- diametrul tijei este egal cu cel al găurii;

- încărcarea este statică și se neglijează efectul concentrării tensiunilor.

Între tija nitului (șurubului) și table apar tensiuni de contact care nu sunt uniform distribuite. Dacă aceste tensiuni depășesc limita de curgere la compresiune, atunci piesa cu o duritate mai mică rămâne cu deformații permanente după descărcare (gaura din tablă sau tijă se ovalizează). Acest lucru trebuie să fie evitat în practică deoarece introduce jocuri în îmbinare, făcând posibilă apariția șocurilor la încărcare, iar demontarea ulterioară va fi dificilă. Calculul pieselor la presiune de contact se mai numește *calcul la strivire*. Acest calculul se face într-o manieră aproximativă, datorită faptului că legea de distribuție a presiunii este greu de determinat. Se admite că presiunea de strivire este distribuită uniform pe o secțiune diametrală, iar aria convențională la strivire A_{str} pentru un șurub (nit) este: $A_{str} = td$ (t – grosimea tablei, d - diametrul tijei (găurii)). Deoarece presiunea este normală pe A_{str} ea mai poate fi notată $p = \sigma_{str}$ și se poate scrie:

$$\sigma_{str} = \frac{T}{A_{str}} \quad (6.11)$$

Calculul la strivire este de obicei unul de verificare. Tensiunea dată de relația (6.11) va fi comparată cu tensiunea admisibilă la strivire $\sigma_{a, str}$, pentru care se recomandă:

$$\sigma_{a, str} = (2 \div 2,5)\sigma_{ac} \quad (6.12)$$

Aplicație

Se consideră îmbinarea din *figura 6.4*, solicitată cu forța $F = 10\text{kN}$. Se cunosc $t = 8\text{mm}$, $d = 10\text{mm}$, $\sigma_a = 150\text{MPa}$, $\sigma_{a\text{str}} = 300\text{MPa}$, $\tau_a = 80\text{MPa}$. Să se dimensioneze îmbinarea, dacă tablele și niturile sunt confecționate din același material.

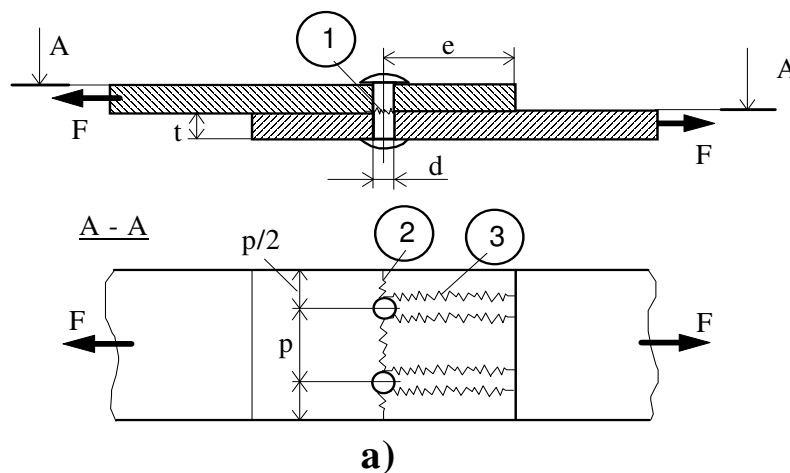


Figura 6.4

În îmbinare apar următoarele solicitări principale: forfecarea nitului, tracțiunea tablelor, forfecarea tablelor, strivirea. Când forța este perpendiculară pe secțiunea de rupere solicitarea este la tracțiune, iar când forța este paralelă se produce solicitarea la forfecare.

Calculul niturilor la forfecare

Niturile sunt solícitate la forfecare în planul de separație dintre table, **secțiunea I** din *figura 6.4*. Pe fiecare din cele z nituri acționează o forță tăietoare:

$$T = \frac{F}{z} \quad (6.13)$$

Tensiunea tangențială care ia naștere este:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{4}{\pi d^2} \frac{F}{z} \quad (6.14)$$

Aceasta nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă și prin urmare:

$$\frac{4}{\pi d^2} \frac{F}{z} \leq \tau_a \quad (6.15)$$

Din relația (6.15) rezultă numărul de nituri:

$$z \geq \frac{4F}{\pi d^2 \tau_a} \quad (6.16)$$

Înlocuind valorile date se obține:

$$z \geq \frac{4}{\pi} \frac{10}{10^2} \frac{10^3}{80} = 1,59 \quad (6.17)$$

Se adoptă un număr întreg de nituri, $z = 2$ nituri.

Calculul tablelor la tracțiune

Secțiunea periculoasă pentru solicitarea la tracțiune este **secțiunea 2**, cea care trece prin centrele găurilor (vezi figura 6.4). Dacă lățimea tablei este L atunci secțiunea poate fi calculată ca:

$$A_t = Lt - ztd \quad (6.18)$$

Tensiunea normală este:

$$\sigma = \frac{N}{A_t} = \frac{F}{t(L - zd)} \quad (6.19)$$

Tablele rezistă la tracțiune dacă tensiunea nu depășește tensiunea admisibilă:

$$\frac{F}{t(L - zd)} \leq \sigma_a \quad (6.20)$$

de unde:

$$L \geq \frac{F}{t\sigma_a} + zd \quad (6.21)$$

Înlocuind valorile date se obține:

$$L \geq \frac{10}{8} \frac{10^3}{150} + 2 \cdot 10 = 28,33 \text{ mm} \quad (6.22)$$

Ținând cont de faptul că (vezi figura 6.4):

$$L = 2p \quad (6.23)$$

se determină pasul nituirii:

$$p = \frac{L}{2} \geq 14,17 \text{ mm} \quad (6.24)$$

Valoarea indicată de *relația* (6.24) reprezintă valoare minimă, stabilită din condițiile de rezistență. Aceasta este prea mică din punct de vedere tehnologic, deoarece capul niturilor (sau în cazul unor îmbinări cu șuruburi piulițele șuruburilor) trebuie să fie suficient de depărtate pentru a permite accesul sculelor de montare (căpuitor pentru nituri, cheie pentru șuruburi). Practic se vor adopta valori mai mari pentru p și L care să satisfacă la condițiile de montaj.

Calculul tablelor la forfecare

Dacă nitul este montat prea aproape de marginea tablei, materialul din spatele său poate fi dislocat prin forfecare. Cele două secțiuni de forfecare corespunzătoare fiecărui nit au fost marcate cu 3 în *figura 6.4*. Suprafața totală de forfecare din îmbinare este:

$$A_f = 2z t e \quad (6.25)$$

Forfecarea tablei în lung, în dreptul marginii niturilor nu are loc dacă:

$$\tau = \frac{F}{A_f} = \frac{F}{2z t e} \leq \tau_a \quad (6.26)$$

sau înlocuind valorile:

$$e \geq \frac{10}{2} \frac{10^3}{2 \cdot 8 \cdot 80} \quad \text{sau} \quad e \geq 3,9 \text{ mm} \quad (6.27)$$

Din punct de vedere tehnologic această valoare este nesatisfăcătoare (practic gaura "cade" parțial în afara tablei). Valoarea trebuie să fie mult mărită astfel încât capul nitului sau piulița șurubului să aibă loc în întregime pe tablă.

Calculul la strivire

Așa cum s-a precizat anterior pentru un nit aria convențională de strivire este data de relația:

$$A_{str} = t d \quad (6.28)$$

Tensiunea efectivă de strivire este:

$$\sigma_{ef \text{ str}} = \frac{\frac{F}{z}}{A_{str}} = \frac{F}{z t d} \quad (6.29)$$

Înlocuind valorile numerice, rezultă:

$$\sigma_{ef \text{ str}} = \frac{10}{2} \frac{10^3}{8 \cdot 10} = 62,5 \text{ MPa} \quad (6.30)$$

deoarece $\sigma_{ef \text{ str}} < \sigma_{a \text{ str}} = 300 \text{ MPa}$ îmbinarea este verificată la strivire (între tablă și nit nu se produce strivirea).

6.4.2. Calculul convențional al îmbinărilor sudate

Îmbinările sudate sunt extrem de utilizate, datorită avantajelor pe care le prezintă: economie de material, preț de cost redus, economie de timp, posibilitatea executării în locuri unde nituirea ar fi imposibilă, etc. Principalele dezavantaje pe care aceste îmbinări le prezintă sunt: necesitatea folosirii unor sudori specialiști pentru executarea sudurii, protejarea sudorului de radiațiile arcului electric și de degajările de gaze toxice este numai parțială, controlul calității sudurii este dificil (cu raze X, γ , etc.), nivelul ridicat al tensiunilor remanente, care sunt prezente în material și în absența sarcinilor. Prezența acestor tensiuni remanente scade capacitatea portantă a structurilor sudate și produce deformarea acestora în absența sarcinilor, înrăutățește sensibil comportarea la solicitări variabile și la coroziune.

Se pot realiza structuri utilizând diverse tipuri de îmbinări sudate. După poziția cordoanelor de sudură în raport cu piesele pe care le îmbină se întâlnesc:

- suduri cap la cap (*figura 6.5a*). La acest tip de îmbinări cordonul de sudură este solicitat numai la tracțiune. Grosimea cordonului de sudură în acest caz este egală cu grosimea pieselor de îmbinat (în cazul sudării cap la cap a unor piese având aceeași grosime) sau egală cu grosimea piesei celei mai subțiri (în cazul sudării cap la cap a unor piese de grosime diferită);
- îmbinări prin simplă suprapunere (*figura 6.5b*);
- îmbinări cu sudură laterală sau cu eclise (*figura 6.5c*);

- îmbinări cu sudură de colț (*figura 6.5d*).

Majoritatea cordonelor de sudură sunt supuse la solicitarea compusă de forfecare cu tracțiune. Numai pentru sudura cap la cap cordonul se calculează la tracțiune.

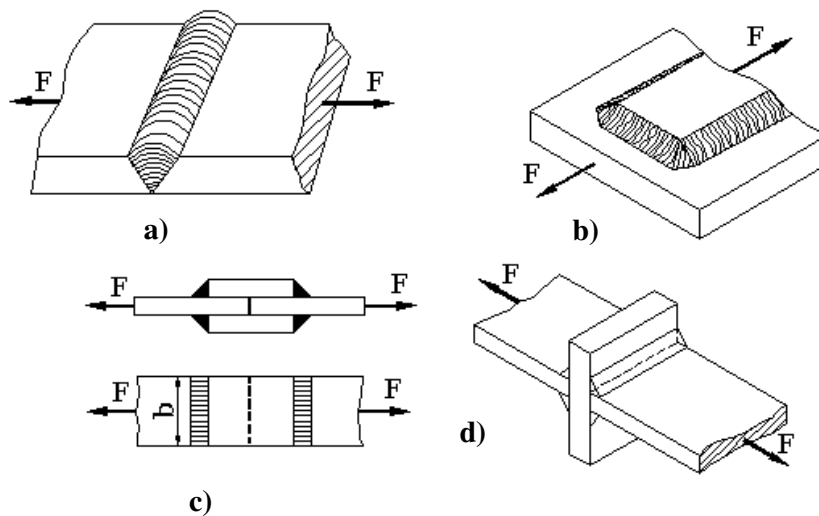


Figura 6.5

În calculul convențional al îmbinărilor sudate se admite că secțiunea transversală a cordonului (*figura 6.6*) este de forma unui triunghi dreptunghic isoscel (sudură plată).

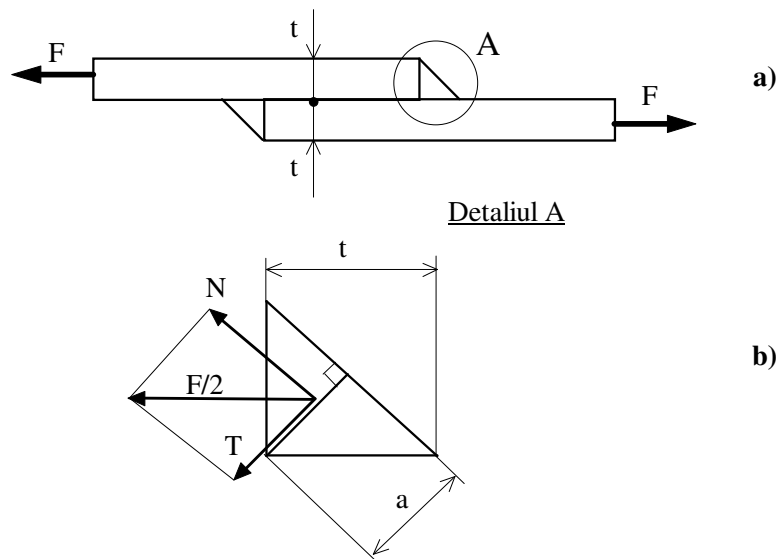


Figura 6.6

Convențional, cordonul de sudură se calculează numai la forfecare, considerând forța tăietoare T ca fiind egală cu întreaga forță repartizată pe cordon. Din *figura 6.7* se observă că aria de forfecare a unui cordon este:

$$A_f = a \cdot L_s \quad (6.31)$$

unde

$$a = \frac{t}{\sqrt{2}} \approx 0,7t \quad (6.32)$$

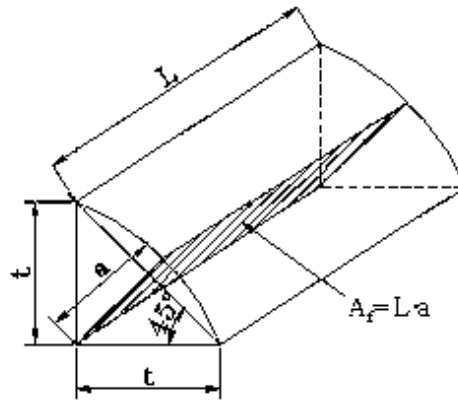


Figura 6.7

Condiția de rezistență pentru sudura cu două cordoane din *figura 6.6* poate fi scrisă astfel:

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{F}{2 \cdot a \cdot L_s} \leq \tau_{as} \quad (6.33)$$

Tensiunile admisibile pentru sudură se adoptă în funcție de tensiunea admisibilă pentru materialul de bază (al tablelor): $\sigma_{as} = 0,8 \sigma_a$; $\tau_{as} = 0,65 \tau_a$.

Deoarece cordonul de sudură nu este de calitate la capetele sale (regiuni unde are loc amorsarea și respectiv dezamorsarea arcului electric), lungimea sa de calcul se consideră mai mică decât cea reală:

$$L_s = L - 2a \quad (6.34)$$

Din relațiile de mai sus se determină de obicei lungimea cordonului L :

$$L \geq \frac{F}{2a \tau_{as}} + 2a \quad (6.35)$$

6.4.3. Calculul convențional al îmbinărilor cu adezivi

Aceste îmbinări sunt și vor fi tot mai răspândite datorită numeroaselor avantaje în comparație cu celelalte metode clasice de îmbinare și anume: permit realizarea unor structuri mai ușoare, prezintă un nivel redus al tensiunilor remanente (în consecință au o comportare îmbunătățită la solicitări variabile, la coroziune și deformații mici în absența sarcinilor), consum redus de energie, permit îmbinarea celor mai diverse materiale chiar și a materialelor nesudabile, se efectuează la temperatura ambiantă sau la o temperatură moderată astfel că materialele sunt puțin afectate termic, pot îmbina piese de cele mai diferite forme și dimensiuni (ansamblul elementelor îmbinate putând atinge mase de sute de kilograme sau mai modest de sutimi de gram), nu sunt necesare în general utilaje speciale costisitoare și nici personal cu calificare specială, simplitatea întreținerii în exploatare, etc.

Principalele dezavantaje ale adezivilor sunt: preț ridicat, modificarea în timp a caracteristicilor mecanice (datorită fenomenului de "îmbătrânire"), prezintă fluaj la temperatura mediului, trebuie să fie manevrați cu atenție, mulți dintre ei fiind toxici, îmbinările cu adezivi sunt mai sensibile la șocuri.

Îmbinările adezive realizate prin simplă (*figura 6.8a*) sau dublă suprapunere, cu eclise, etc., pot înlocui cu mult succes îmbinările sudate sau cele realizate cu nituri. Exceptând un număr redus de îmbinări, la majoritatea adezivul este supus în special la forfecare. Într-o îmbinare adezivă tensiunile sunt distribuite după curba lăncișorului (sunt mai mici în zona centrală și mai mari la capete).

Se va prezenta în continuare calculul de rezistență pentru trei tipuri de îmbinări adezive. Acest calcul convențional se bazează pe ipoteza că tensiunile tangențiale sunt uniforme în tot volumul stratului de adezivului.

Calculul îmbinărilor realizate prin simplă suprapunere

Este tipul de îmbinare cel mai des întâlnit în practică. În acest caz suprafața de forfecare a adezivului este (vezi figura 6.8a):

$$A_f = L \cdot l_s \quad (6.36)$$

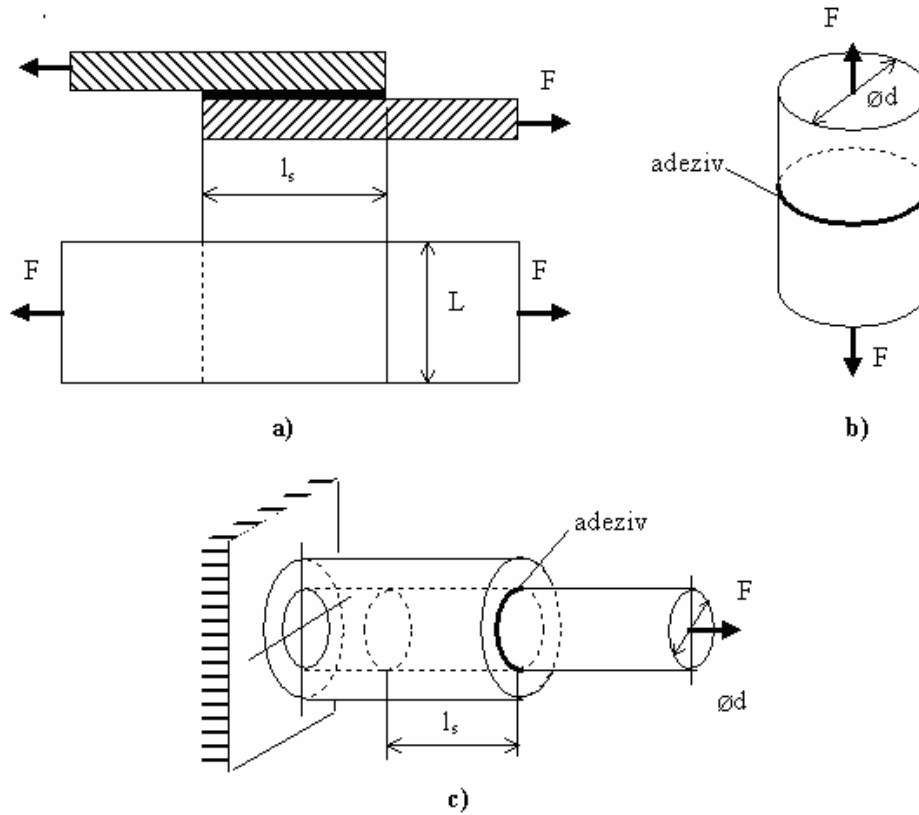


Figura 6.8

Pentru ca stratul de adeziv, solicitat la forfecare, să reziste este necesar ca tensiunea tangențială din strat să nu depășească tensiunea admisibilă a adezivului τ_{ad} :

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{F}{L \cdot l_s} \leq \tau_{ad} \quad (6.37)$$

Din această condiție se determină lungimea de suprapunere a tablelor l_s :

$$l_s \geq \frac{F}{L \tau_{ad}} \quad (6.38)$$

sau se poate determina forța capabilă $F_{cap} \leq L \tau_{ad}$ pe care o poate suporta îmbinarea adezivă.

Calculul îmbinărilor adezive cap la cap

Îmbinările cap la cap (*figura 6.8b*) realizate cu ajutorul adezivilor sunt mai puțin recomandate având în general o rezistență mai redusă. În cazul acestor îmbinări stratul de adeziv este supus la tracțiune. Tensiunea normală care apare în stratul de adeziv nu trebuie să o depășească pe cea admisibilă, deci:

$$\sigma = \frac{N}{A_t} = \frac{4F}{\pi d^2} \leq \sigma_{ad} \quad (6.39)$$

Forța capabilă pentru o astfel de îmbinare poate fi determinată din relația:

$$F_{cap} \leq \frac{\pi d^2 \sigma_{ad}}{4} \quad (6.40)$$

Calculul îmbinării adezive realizată între o bușă cu o tijă

Pentru îmbinarea prezentată în *figura 6.8c* suprafața de forfecare a adezivului este:

$$A_f = \pi d l_s \quad (6.41)$$

iar din condiția de rezistență:

$$\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{F}{A_f} = \frac{F}{\pi d l_s} \leq \tau_{ad} \quad (6.42)$$

rezultă lungimea de suprapunere:

$$l_s \geq \frac{F}{\pi d \tau_{ad}} \quad (6.43)$$

CAPITOLUL 7

TORSIUNEA BARELOR DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

7.1. Considerații generale

Scopul acestui capitol este prezentarea calculelor de rezistență și de rigiditate pentru cazul *barelor drepte de secțiune circulară* supuse **la torsiune (răsucire)**.

Așa cum s-a precizat în *paragraful 2.5* o bară dreaptă este sollicitată la torsiune dacă efortul din secțiunea transversală este un moment M_x care, în reprezentare vectorială, este dirijat după axa Ox (aleasă convențional pe direcția axei barei). Practic are loc deformarea barei sub acțiunea unor cupluri de forțe cuprinse în plane perpendiculare pe axa geometrică a acesteia, iar suporturile forțelor nu intersectează axa.

Sunt sollicate, de exemplu, la torsiune tijele unor chei tubulare, pentru strângerea sau desfacerea șuruburilor. De asemenea sunt supuși la torsiune și încovoiere arborii pe care sunt montate roțile dințate, roțile de curea, etc. Cu

ajutorul acestora se realizează unele transmisii prin intermediul cărora se face acționarea mașinilor și mecanismelor.

7.2. Deformarea barelor solicate la torsiune

Fie o bară dreaptă de secțiune circulară, la suprafața căreia se trasează o rețea de directoare și generatoare. Se solictă bara la torsiune. După aplicarea momentului de torsiune M_t , ochiurile rețelei vor suferi doar deformații unghiulare (vezi figura 7.1b) ceea ce demonstrează prezența tensiunilor tangențiale τ . Experimental se arată că:

- lungimea barei l nu se modifică;
- distanțele dintre secțiunile transversale rămân aceleași, ceea ce arată că nu apar tensiuni normale;

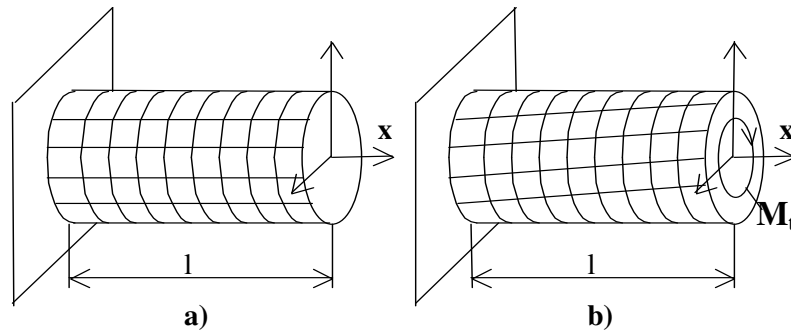


Figura 7.1

- secțiunile plane și perpendiculare pe axa longitudinală a barei înainte de deformare (cercurile) rămân plane și perpendiculare pe axa barei și după deformare. Prin urmare secțiunile transversale nu se depanează (ceea ce confirmă ipoteza lui Bernoulli) și se rotesc numai una față de alta.

În paragraful 3.1.6. s-a prezentat faptul că în urma solictării la torsiune a epruvetelor din materiale tenace, rezultă o diagramă $M_t - \varphi$. Pornind de la această diagramă se poate trasa curba caracteristică în coordonate $\tau - \gamma$ (vezi figura 3.18).

Porțiunea inițială a diagramei este rectilie și în această regiune este valabilă legea lui Hooke (*relația 3.18*).

La calculul barelor supuse la torsiune (răsucire) vor fi admise următoarele ipoteze:

- bara este dreaptă și de secțiune circulară;
- secțiunile nu se deplanează în urma solicitărilor (se verifică ipoteza lui Bernoulli);
- deformațiile sunt elastice și mici;
- materialul barei este omogen, izotrop și ascultă de legea lui Hooke.

Pentru calculul deformațiilor se consideră bara din *figura 7.2a*, de secțiune circulară cu raza **R**, încastrată la o extremitate și acționată în capătul liber de momentul de torsiune **M_t**. Efortul este constant pe toată lungimea barei: **M_x = M_t**. În urma deformației generatoarea **BC** de pe suprafața laterală a barei se rotește cu unghiul **γ** și ajunge în poziția **B'C'** (**γ** reprezintă deformația unghiulară pe suprafața cilindrică exterioară a barei). Secțiunea **CC'** situată la distanța **x** de capătul încastrat se rotește cu unghiul **φ** față de secțiunea din încastrare, iar secțiunea **BB'** situată la distanța **x+dx** se rotește față de aceeași secțiune cu unghiul **φ+dφ**.

Se aplică metoda secțiunii și se izolează din bară un element de lungime **dx** (*figura 7.2b*). În ipoteza deformațiilor mici se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \approx \frac{\operatorname{arc}(A'A'')}{dx} = \frac{Rd\varphi}{dx} \quad (7.1)$$

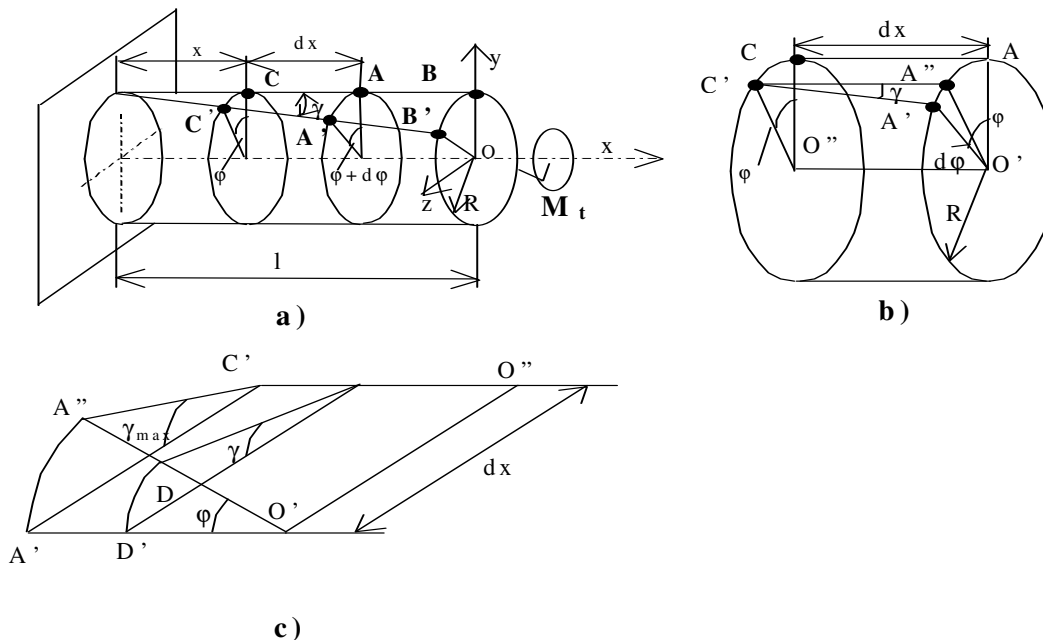


Figura 7.2

Se notează cu:

$$\frac{d\phi}{dx} = \theta \quad (7.2)$$

unghiul de rotire specifică (unghiul cu care se rotesc una față de alta două secțiuni transversale, dacă distanța dintre ele este egală cu unitatea) și se măsoară în [rad/m].

Din relațiile (7.1) și (7.2) rezultă:

$$\gamma = \theta \cdot R \quad (7.3)$$

Se observă că lunecarea γ este maximă la suprafață și este proporțională cu raza (vezi figura 7.2c) deoarece:

$$\frac{\text{arc}(A'A'')}{R} = \frac{\text{arc}(DD')}{r} \quad (7.4)$$

Aceste observații îndreptățesc ipoteza că și tensiunea tangențială τ este proporțională cu raza și, în consecință, atinge valoarea maximă la raza R .

Din legea lui Hooke (vezi relația 3.18) avem:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

și ținând cont de *relația* (7.3) rezultă:

$$\tau(R) = G \cdot \theta \cdot R \quad (7.5)$$

La raza curentă r tensiunea tangențială va fi dată de:

$$\tau(r) = G \cdot \theta \cdot r \quad (7.6)$$

Relația (7.6) arată că tensiunea tangențială este distribuită liniar pe direcția razei: tensiunea tangențială este nulă în centru de greutate al barei (la $r = 0$), variază liniar cu raza r și este maximă pe conturul secțiunii, așa cum este reprezentat în *figura 7.3a*.

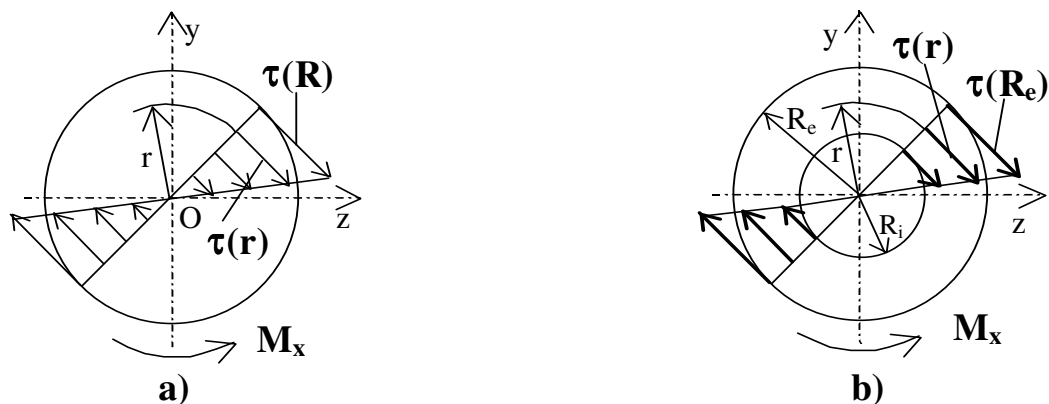


Figura 7.3.

Pentru solicitarea de răsucire rămâne valabilă doar una din cele șase ecuații de echivalență și anume *relația* (2.19):

$$M_x = \int_A \tau \cdot r \cdot dA$$

Ținând cont de *relația* (7.6) ecuația de echivalență devine:

$$M_x = G \cdot \theta \cdot \int_A r^2 dA = G \cdot \theta \cdot I_p \quad (7.7)$$

Din ultima relație se poate scrie:

$$\theta = \frac{M_x}{GI_p} \quad (7.8)$$

unde: I_p - momentul de inerție polar dat de *relația* (1.9);

G – modulul de elasticitate transversala.

Se observă ca deformația la răsucire este cu atât mai mică cu cat produsul GI_p este mai mare. Ca urmare acest produs poartă numele de *modul de rigiditate la torsiune* al barei cu secțiune circulară.

Ținând cont de (7.2), pentru deformații mici se poate scrie unghiul de rotire al secțiunii transversale:

$$\varphi = \theta \quad l$$

sau înlocuind *relația* (7.8):

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (7.9)$$

Relația (7.8) poate fi folosită pentru *calculul din condiția de rigiditate* (dimensionare sau verificare), limitând astfel deformațiile și nu tensiunile. Ea se mai numește *criteriul de rigiditate*. Astfel:

- *pentru dimensionare* se calculează diametrul barei impunând condiția ca rotirea specifică maximă să nu o depășească pe cea admisibilă:

$$\theta \leq \theta_a$$

(7.180)

- în *calculul de verificare* toate mărimile sunt cunoscute și se verifică doar dacă este satisfăcută *inegalitatea* (7.10).

Unghiul de rotire specific admisibil se ia funcție de regimul de lucru al arborelui ($\theta_a = (0,15 \dots 0,3)^\circ/\text{m}$).

7.3. Calculul tensiunii tangențiale

Relația (7.8) mai poate fi scrisă:

$$G\theta = \frac{M_x}{I_p} \quad (7.11)$$

Înmulțind ambii termeni cu r și ținând cont de (7.6), rezultă:

$$\tau(r) = \frac{M_x}{I_p} r \quad (7.12)$$

Pe conturul barei, pentru $r = R$, se poate scrie:

$$\tau(R) = \frac{M_x}{I_p} \frac{R}{R} = \frac{M_x}{\frac{I_p}{R}} \quad (7.13)$$

Tensiunea tangențială maximă se calculează cu relația:

$$\tau_{\max} = \tau(R) = \frac{M_x}{W_p} \quad (7.14)$$

unde: W_p - modulul de rezistență polar dat de *relația (1.22)*.

Relația (7.14) poate fi folosită pentru calculul din condiția de rezistență (dimensionare sau verificare), limitând tensiunile din bară. Ea se mai numește criteriul de rezistență. Astfel:

- *pentru dimensionare se calculează diametrul barei impunând condiția ca tensiunea tangențială maximă să nu o depășească pe cea admisibilă:*

$$\tau_{\max} \leq \tau_a \quad (7.15)$$

- *în calculul de verificare toate mărimile sunt cunoscute și se verifică doar dacă este satisfăcută inegalitatea (7.15).*

În *relația (7.15)* $\tau_{\max} = |\tau(R)|$ reprezintă tensiunea tangențială în secțiunea (sau regiunea) periculoasă, care se stabilește în urma trasării diagramelor M_x și $\tau(R)$.

Observație:

Pentru calculul de dimensionare relațiile (7.10) și (7.15) vor furniza două valori pentru aceeași mărime (diametrul barei). Rezolvarea problemei constă în alegerea valorii celei mai mari din cele două, întrucât aceasta va satisface ambele condiții.

7.4. Secțiunea rațională

Analizând repartiția din *figura 7.3a*, din punctul de vedere al solicitării materialului pe întreaga secțiune transversală, se observă că tensiunile tangențiale

din vecinătatea centrului de greutate al secțiunii sunt nule sau aproape nule, fapt care implică o utilizare nerațională a materialului. Utilizarea rațională a materialului se realizează la barele de secțiune circulară inelară. Repartiția tensiunilor τ pentru secțiunea circulară inelară este prezentată în *figura 7.3b*. Se observă că diferența dintre tensiunea maximă și cea minimă este mică ceea ce înseamnă că aproape tot materialul de pe secțiunea transversală este folosit optim. Găurirea barelor pe lungimi mari este însă scumpă și în consecință asemenea arbori sunt rareori utilizați. Dacă pereții barei tubulare sunt prea subțiri, atunci distrugerea se produce prin voalarea pereților barei (flambaj la torsiune) și nu prin depășirea tensiunii de rupere τ_r . Arborii de secțiune circulară plină au însă deformații mai mici (sunt mai rigizi).

7.5. Calculul momentului de torsiune cunoscând puterea și turația

Este prezentat calculul momentului de torsiune, funcție de putere și turație, la motoarele electrice, cu ardere internă, etc.

De la fizică se cunoaște expresia puterii ca fiind :

$$P = F \cdot v \quad (7.16)$$

În mișcarea circulară uniformă:

$$v = \omega \cdot r; \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot n \quad (7.17)$$

Din relațiile de mai sus rezultă:

$$P = (F \cdot r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \quad (7.18)$$

Dar $F \cdot r = M_t$ și prin urmare din *relația (7.18)* se poate scrie:

$$M_t = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{n} \quad (7.19)$$

În *relația (7.19)* mărimile sunt exprimate în unitățile S.I, adică:

M_t - momentul de torsiune în Nm;

P – puterea în W;

n - turația în rot/sec.

Dacă turația este în rot/min membrul drept al *relației* (7.19) trebuie să fie înmulțit cu 60 și, după simplificare, se obține:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} = 9,55 \frac{P}{n} \quad (7.20)$$

unde: M_t în Nm, P în W și n în rot/min.

Relația (7.20) poate avea în membrul din dreapta diverși coeficienți, care provin din utilizarea altor unități de măsură.

7.6. Energia potențială de deformare

Pentru cazul în care apar tensiuni tangențiale, energia de deformare se calculează cu *relația* (4.16):

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad (7.21)$$

în care tensiunea tangențială este dată de *relația* (7.12). Înlocuind această relație în (7.21) se obține succesiv:

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2GI_p^2} dx \int_A r^2 dA \quad (7.22)$$

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2GI_p} dx \quad (7.23)$$

Relația (7.23) permite calculul energiei de deformare înmagazinată de către o bară dreaptă de secțiune circulară solicitată la torsiune.

Dacă $M_x = \text{const.}$ pe toată lungimea barei, *relația* (7.23) devine:

$$U = \frac{M_x^2 l}{2GI_p} \quad (7.24)$$

iar dacă bara are n regiuni, energia totală se determină prin însumarea energiilor corespunzătoare fiecărei regiuni, adică:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (7.25)$$

Aplicații

1) Arborele unui electromotor transmite o putere de 200 kW, la turație de 250 rot/min. Să se determine diametrul arborelui, știind că $\tau_a = 40$ MPa.

Momentul de torsiune se determină cu *relația* (7.20), iar tensiunea tangențială maximă este dată de *relația* (7.14). Pentru secțiunea circulară plină

modulul de rezistență polar este: $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$. Făcând înlocuirile rezultă:

$$\tau_{\max} = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} \frac{16}{\pi d^3} \quad (7.26)$$

Punând *condiția* (7.15), ca tensiunea maximă să nu o depășească pe cea admisibilă, ($\tau_{\max} \leq \tau_a$) rezultă:

$$\frac{30}{\pi^2} \frac{16}{n} \frac{P}{d^3} \leq \tau_a \quad (7.27)$$

sau

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{30}{\pi^2} \frac{16}{n} \frac{P}{\tau_a}} \geq 9,9 \text{ mm} \quad (7.28)$$

Se adoptă $d = 10$ mm.

2) Se consideră un arbore în două variante constructive: cu secțiune circulară plină (*figura 7.4a*) și cu secțiune circulară inelară (*figura 7.4b*), pentru secțiunea circulară inelară raportul diametrelor fiind $d_e/d_i = 2$. În ambele variante lungimea arborelui, puterea și turația sunt aceleași. De asemenea se consideră că în ambele variante constructive se utilizează același material (deci arborii au aceleași constantele de material τ_a , γ și G). Să se dimensioneze cei doi arbori (pe baza criteriului de rezistență) și să se determine raportul greutateilor G_1/G_2 .

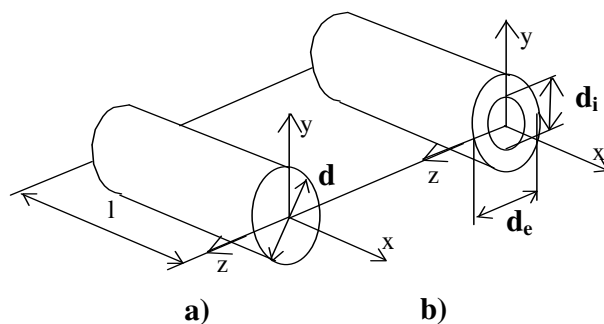


Figura 7.4

Raportul greutateilor va fi:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma}{\gamma} \frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma}{\gamma} \frac{A_1}{A_2} \frac{l}{l} = \frac{A_1}{A_2} \quad (7.29)$$

cu:

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} d_i^2 \left[\left(\frac{d_e}{d_i} \right)^2 - 1 \right] = \frac{\pi}{4} d_i^2 [(2)^2 - 1] = 3 \frac{\pi d_i^2}{4} \quad (7.30)$$

Înlocuind în *relația* (7.29) rezultă:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{4}{3\pi d_i^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{d}{d_i} \right)^2 \quad (7.31)$$

Conform *relației* (7.19) momentul de torsiune transmis de cei doi arbori este același.

Pentru arborele cu secțiunea circulară plină diametrul determinat cu criteriul de rezistență este:

$$\frac{M_t}{W_{pl}} = M_t \frac{16}{\pi d^3} \leq \tau_a$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_a}} \quad (7.32)$$

Pentru arborele cu secțiunea circulară inelară modulul de rezistență polar se determină cu relația: $W_p = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{16d_e}$, iar diametrul din criteriul de rezistență este:

$$\frac{M_t}{W_{p2}} = M_t \frac{16 d_e}{\pi(d_e^4 - d_i^4)} = \frac{16M_t d_e}{\pi d_i^3 d_i} \frac{1}{[(\frac{d_e}{d_i})^4 - 1]} = \frac{16M_t}{\pi d_i^3} \frac{2}{2^4 - 1} = \frac{2}{15} \frac{16M_t}{\pi d_i^3} \leq \tau_a$$

$$d_i \geq \sqrt[3]{\frac{2}{15} \frac{16M_t}{\pi \tau_a}} \quad (7.33)$$

Înlocuind (7.32) și (7.33) în relația (7.31) se obține:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{1}{3} \left(\frac{16M_t}{\pi \tau_a} \frac{15}{2} \frac{\pi \tau_a}{16M_t} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left(\frac{15}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1,28 \quad (7.34)$$

Rezultatul obținut arată că, pentru un raport $d_e / d_i = 2$, greutatea arborelui de secțiune circulară plină depășește cu circa 28% pe cea a arborelui de secțiune circulară inelară.

3) Momentele de torsiune sunt aplicate de obicei arborilor prin intermediul roților dințate, a roților de curea sau de lanț. Lățimea acestor roți fiind foarte mică în raport cu lungimea arborelui, momentele de torsiune pot fi considerate concentrate. Pentru arborele de oțel din figura 7.5a să se traseze diagramele M_x , $\tau(R)$ și φ .

Dacă $M_t = 3 \text{ kNm}$, $l = 250 \text{ mm}$, $\tau_a = 80 \text{ MPa}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, să se dimensioneze arborele ($D = 1,3d$).

Rezolvarea problemei cuprinde mai multe etape, prezentate în continuare:

1. Trasarea diagramei de efort

Pentru trasarea diagramei de efort se vor parcurge următoarele etape:

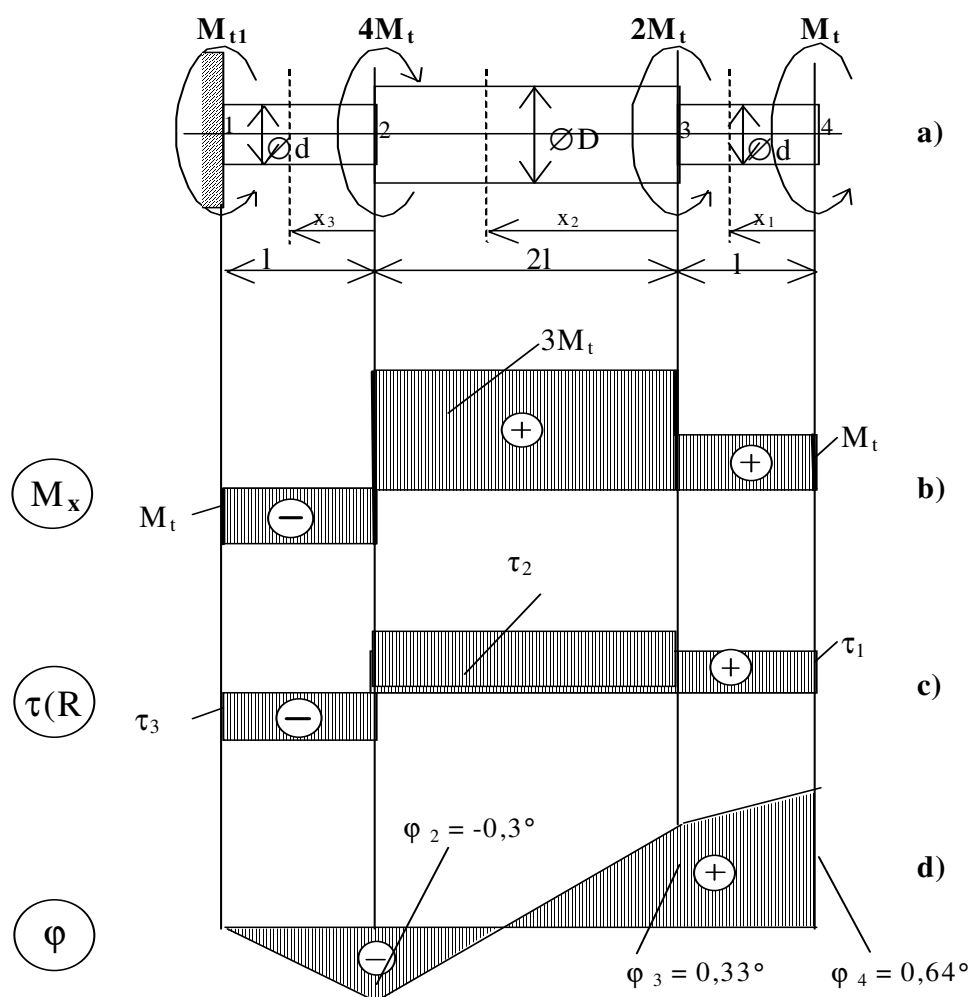


Figura 7.5

1.1. Determinarea reacțiunilor

Deoarece bara este sollicitată numai cu momentele de torsiune, reacțiunea care apare în încastrare este tot un moment de torsiune. Aceasta poate fi determinată din următoarea ecuație de echilibru, pentru care s-a ales în mod arbitrar ca pozitiv sensul momentului M_t :

$$M_t + 2M_t - 4M_t + M_{t1} = 0 \Rightarrow M_{t1} = M_t$$

Observație:

Pentru barele în consolă etapa figurării și determinării reacțiunilor este opțională. La aceste bare calculul reacțiunilor poate fi evitat dacă, după secționare, se reține mereu porțiunea de bară dinspre capătul liber al barei.

1.2. Împărțirea barei în regiuni și efectuarea secțiunilor în fiecare regiune

Pe bara din *figura 7.5* sunt trei regiuni pe care s-au făcut secțiunile x_1 , x_2 , x_3 .

1.3. Trasarea diagramei M_x

Luând în considerare tot timpul porțiunea de arbore din stânga secțiunii eforturile în cele trei regiuni ale barei sunt:

$$\begin{aligned}x_1 \in [0, l] & \quad M_x(x_1) = M_t \\x_2 \in [0, 2l] & \quad M_x(x_2) = M_t + 2M_t = 3M_t \\x_3 \in [0, l] & \quad M_x(x_3) = M_t + 2M_t - 4M_t = -M_t\end{aligned}$$

Cu aceste valori se trasează diagrama M_x prezentată în *figura 7.5b*.

Observație:

În secțiunea în care asupra barei acționează un moment concentrat (sarcină sau reacțiune), în diagrama M_x apare un salt, egal în modul cu acel moment. Această observație permite o verificare rapidă a diagramei.

2. Trasarea diagramei $\tau(R)$

Tensiunile tangențiale maxime se determină cu *relația (7.14)*, unde M_x este momentul de torsiune luat din diagrama trasată mai sus. Pentru cele trei regiuni se poate scrie:

$$\begin{aligned}\tau(x_1) = \tau_1 &= \frac{M_t(x_1)}{W_{p1}} = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16M_t}{\pi d^3}; \\ \tau(x_2) = \tau_2 &= \frac{M_t(x_2)}{W_{p2}} = \frac{3M_t}{\frac{\pi(1,3d)^3}{16}} = \frac{21,8M_t}{\pi d^3} \\ \tau(x_3) = \tau_3 &= \frac{M_t(x_3)}{W_{p1}} = -\frac{16M_t}{\pi d^3}\end{aligned}$$

Diagrama $\tau(R)$ este prezentată în *figura 7.5c*.

3. Dimensionarea arborelui

Din diagrama $\tau(\mathbf{R})$ se alege tensiunea tangențială maximă în modul. În cazul prezentat aceasta este în regiunea a doua a arborelui:

$$\tau_{\max} = \max(|\tau(x_1)|, |\tau(x_2)|, |\tau(x_3)|) = \tau(x_2)$$

deci

$$\tau_{\max} = \frac{21,8M_t}{\pi d^3}$$

Pentru dimensionare se impune *condiția* (7.15), ca tensiunea $\tau_{\max}$ să nu depășească τ_a :

$$21,8 \frac{M_t}{\pi d^3} \leq \tau_a$$

de unde rezultă:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{21,8 M_t}{\pi \tau_a}}$$

Înlocuind valorile numerice în ultima inegalitate rezultă:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{21,8 \cdot 3 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} \geq 63,8 \text{ mm}$$

Se adoptă $d = 65 \text{ mm}$.

4. Trasarea diagramei φ

La fel ca la solicitări axiale, deplasările absolute sunt raportate la un sistem de referință fix, cu originea în încastrare. Rotirile sunt calculate cu *relația* (7.9).

În încastrare deplasările sunt nule și deci $\varphi_1 = 0$. Rotirea *secțiunii 2* față de *secțiunea 1* este o rotire absolută, fiind raportată la sistemul fix cu originea în *1*:

$$\varphi_{2-1} = \varphi_2 = \frac{M_t(x_3)}{GI_{p1}} \cdot 1 = -\frac{M_t l}{G \frac{\pi d^4}{32}} = -\frac{32M_t l}{G\pi d^4}$$

Rotirea *secțiunii 3* față de *1* va fi suma dintre rotirea absolută φ_2 și cea relativă φ_{3-2} (rotirea secțiunii 3 față de secțiunea 2):

$$\begin{aligned}\varphi_{3-1} = \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{3-2} &= \varphi_2 + \frac{M_t(x_2)2l}{GI_{p2}} = \\ &= -\frac{32M_t l}{G\pi d^4} + \frac{32 \cdot 3M_t 2l}{G\pi(1,3d)^4} = \frac{35,22M_t l}{G\pi d^4}\end{aligned}$$

Similar se determină rotirea *secțiunii 4* față de *1*:

$$\begin{aligned}\varphi_{4-1} = \varphi_4 = \varphi_3 + \varphi_{4-3} &= \varphi_3 + \frac{M_t(x_3)l}{GI_{p1}} = \\ &= \frac{35,22M_t l}{\pi G d^4} + \frac{32M_t l}{\pi G d^4} = \frac{67,22M_t l}{\pi G d^4}\end{aligned}$$

Înlocuind în expresiile rotirilor valorile numerice rezultă:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= 0,0053 \text{ rad} = 0,0053 \frac{180}{\pi} \approx 0,3^\circ; \\ \varphi_3 &= 0,0058 \text{ rad} \approx 0,33^\circ; \\ \varphi_4 &= 0,011 \text{ rad} \approx 0,64^\circ.\end{aligned}$$

Pentru trasarea diagramei rotirilor (*figura 7.5d*) se vor figura punctele de ordonată φ_1 , φ_2 , φ_3 și φ_4 care apoi vor fi unite cu segmente de dreaptă (deoarece unghiul de rotire depinde liniar de lungimea porțiunii de bară). Se reamintește faptul că această diagramă trebuie să fie continuă, fără salturi, din motive de continuitate a deformațiilor.

7.7 Probleme static nedeterminate

Ca și în cazul solicitărilor axiale, în practică se pot întâlni adesea bare supuse la torsiune care să se prezinte ca sisteme static nedeterminate (numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuațiilor). Pentru ridicarea nedeterminării ecuațiile de echilibru se completează cu ecuații între deformații. Se prezintă în continuare două exemple.

Aplicație

1) Se consideră bara de oțel dublu încastrată, supusă la torsiune (*figura 7.6a*). Să se dimensioneze dacă $M_t = 4 \text{ kNm}$, $\tau_a = 80 \text{ MPa}$ (raportul $D/d = 2$).

Rezolvare

Deoarece sarcinile care acționează asupra barei sunt numai momente de torsiune, reacțiunile vor fi de asemenea numai momente de torsiune M_{t1} și M_{t4} , a căror sens a fost figurat arbitrar în figura 7.6a.

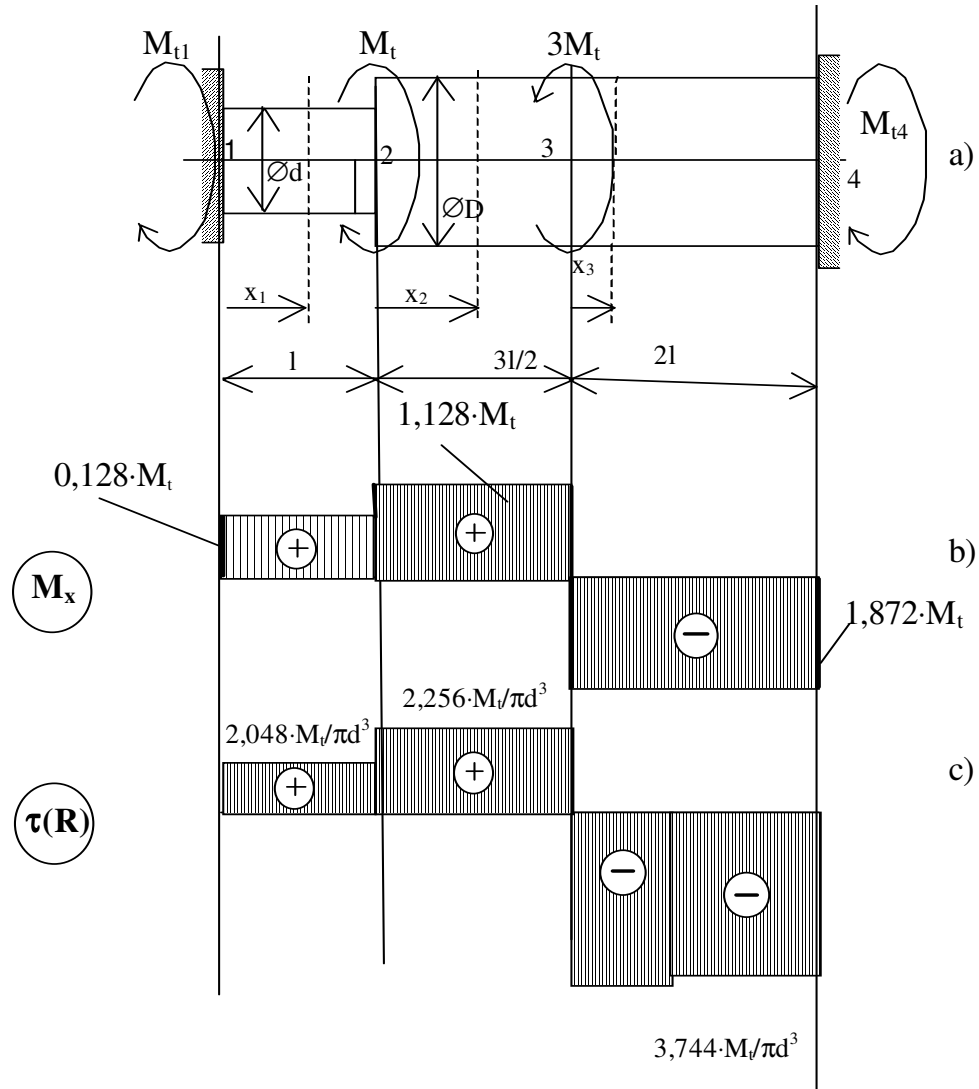


Figura 7.6

Deoarece vectorii M_t sunt coliniari, orientați pe axa barei, poate fi scrisă o singură ecuație de echilibru. Adoptând sensul lui M_t ca fiind pozitiv, rezultă:

$$M_{t1} + M_t - 3M_t + M_{t4} = 0$$

Având o ecuație și două necunoscute, problema este *simplu static nedeterminată*. Este necesară o ecuație suplimentară pentru a forma un sistem compatibil, ecuație care se obține în urma studiului deformației sistemului. Acest studiu poate fi făcut aplicând metode geometrice (de compatibilitate geometrică a deformațiilor) sau metode energetice.

În exemplul propus pentru ridicarea nedeterminării se va aplica o metodă geometrică. În acest sens se face observația că rotirile în *secțiunile 1 și 4* sunt nule $\varphi_1 = \varphi_4 = 0$. Altfel spus, *rotirea secțiunii 4 față de secțiunea 1 este nulă*, adică: $\varphi_{4-1} = \varphi_4 = \varphi_{2-1} + \varphi_{3-2} + \varphi_{4-3} = 0$.

Ținând cont de relațiile de calcul ale rotirilor rezultă:

$$\varphi_{4-1} = \frac{M_t(x_1)l}{GI_{p1}} + \frac{M_t(x_2)}{GI_{p2}} \frac{3l}{2} + \frac{M_t(x_3)}{GI_{p2}} 2l = 0 \quad (7.35)$$

Momentele de torsiune în cele trei regiuni ale arborelui sunt:

$$M_t(x_1) = M_{t1}$$

$$M_t(x_2) = M_{t1} + M_t \quad (7.36)$$

$$M_t(x_3) = M_{t1} + M_t - 3M_t = M_{t1} - 2M_t$$

iar momentele de inerție polare ale celor două tronsoane sunt:

$$I_{p1} = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_{p2} = \frac{\pi(2d)^4}{32} = 16I_{p1}$$

Înlocuind în (7.35) rezultă:

$$\frac{M_{t1}}{I_{p1}} + \frac{M_{t1} + M_t}{16 I_{p1}} \frac{3}{2} + 2 \frac{M_{t1} - 2M_t}{16 I_{p1}} = 0$$

după efectuarea calculelor se obține:

$$32 \cdot M_{t1} + 3(M_{t1} + M_t) + 4(M_{t1} - 2M_t) = 0$$

de unde:

$$M_{t1} = \frac{5}{39} M_t \approx 0,128 M_t$$

Din ecuația de echilibru se calculează cea de a doua reacțiune:

$$M_{t4} = 2M_t - M_{t1} = (2 - \frac{5}{39})M_t = \frac{73}{39}M_t \approx 1,872 M_t$$

Din calcule ambele reacțiuni au rezultat pozitive, ceea ce înseamnă că sensul ales inițial este corect.

Pentru trasarea diagramei de moment de torsiune se înlocuiesc valorile găsite pentru reacțiuni în expresiile eforturilor (*relațiile 7.36*). Rezultă:

$$M_t(x_1) = 0,128 \cdot M_t;$$

$$M_t(x_2) = 1,128 \cdot M_t;$$

$$M_t(x_3) = -1,872 \cdot M_t$$

Valorile obținute sunt reprezentate grafic în diagrama din *figura 7.6b*.

Tensiunile tangențiale maxime (la suprafața barei) se vor determina cu *relația (7.14)*. Modulele de rezistență polare ale arborelui pe cele trei regiuni sunt:

$$W_{p1} = \frac{I_{p1}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16};$$

$$W_{p2} = W_{p3} = \frac{I_{p2}}{d} = \frac{\pi d^3}{2};$$

Tensiunile tangențiale pe regiuni pot fi scrise astfel:

$$\tau(x_1) = \frac{M_t(x_1)}{W_{p1}} = \frac{16}{\pi d^3} \cdot 0,128 M_t = 2,048 \frac{M_t}{\pi d^3}$$

$$\tau(x_2) = \frac{M_t(x_2)}{W_{p2}} = \frac{1,128}{\pi d^3} \cdot 2 M_t = 2,256 \frac{M_t}{\pi d^3}$$

$$\tau(x_3) = \frac{M_t(x_3)}{W_{p3}} = \frac{-1,872}{\pi d^3} \cdot 2 M_t = -3,744 \frac{M_t}{\pi d^3}$$

Diagrama tensiunilor tangențiale $\tau(R)$ este prezentată în *figura 7.6c*.

Stabilirea dimensiunilor secțiunii transversale se face din condiția ca tensiunea maximă în modul să nu depășească pe cea admisibilă. Se observă din *figura 7.6c* că tensiunea este maximă în modul în regiunea a treia, care este și regiunea periculoasă. Prin urmare:

$$\tau_{\max} = \left| -3,744 \frac{M_t}{\pi d^3} \right| \leq \tau_a$$

de unde:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{3,744 M_t}{\pi \tau_a}}$$

sau

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{3,744 \cdot 4 \cdot 10^6}{\pi 80}} \geq 39,06 \text{ mm}$$

Se adoptă $d = 40 \text{ mm}$. Deoarece $D = 2d$, rezultă $D = 80 \text{ mm}$.

CAPITOLUL 8

SOLICITAREA DE ÎNCOVOIERE

8.1. Considerații generale

După cum s-a arătat în *paragraful 2.9*, solicitarea de *încovoiere* poate fi *încovoiere pură* și *încovoiere simplă*. Prin *încovoiere pură* se înțelege deformarea unei grinzi produsă de un sistem de forțe static echivalente care produc în secțiunea transversală un moment încovoiător, la cărui vector este dirijat după una din axele principale ale secțiunii transversale. În cazul solicitării de *încovoiere simplă* în secțiunea transversală a grinzii apare pe lângă un moment încovoiător și o forță tăietoare. Solicitarea la *încovoiere pură* este o solicitare simplă. În practică se întâlnește frecvent solicitarea la *încovoiere simplă* care, în multe situații (de exemplu cazul barelor lungi cu secțiune masivă), poate fi asimilată cu o solicitare simplă.

În cazul încovoierii pure, în secțiunea barei apare numai unul din eforturile M_z sau M_y (prezența simultană a eforturilor M_z și M_y se produce în cazul *solicitării compuse* la *încovoiere oblică*). La încovoiere, axa Oy se consideră

pozitivă în jos datorită faptului că majoritatea forțelor exterioare (sarcini) provin din greutate și sunt orientate în această direcție. Deplasările în sensul axei Oy sunt considerate pozitive.

Grinzile solicitate la încovoiere pot fi încărcate cu forțe și momente concentrate sau distribuite. Forțele distribuite pot să provină din greutatea proprie a grinzii, acțiunea presiunii (de exemplu asupra aripii de avion, paletelor de turbină, etc.), a forțelor de inerție (cum apar în cazul bielei unui motor cu ardere internă, a elicelor de avion sau elicopter, etc.).

8.2. Studiul deformării grinzilor

Se studiază deformația unei grinzi, având trasată la suprafață o rețea de drepte ortogonale la distanțe egale (*figura 8.1a*). Dreptele perpendiculare pe axa grinzii vor reprezenta secțiunile transversale, iar cele paralele cu aceasta vor sugera fibrele longitudinale. Grinda este supusă la *încovoiere pură*. Se observă că:

- liniile longitudinale (generatoarele) se deformează după arce de cerc. Din *figura 8.1b* se observă că la partea inferioară a grinzii (de la exteriorul curburii) reperele se îndepărtează, iar la partea superioară (la interiorul curburii) se apropie. Rezultă că fibrele de la exteriorul curburii sunt *tracționate*, ($a_2 > a_0$), iar cele de la interior *comprimate* ($a_1 < a_0$). Zona tracționată este separată de cea comprimată prin *planul neutru*. Acesta conține *axa neutră*, care unește centrele de greutate ale secțiunilor transversale. Fibrele din planul neutru *nu își modifică lungimea* după deformarea barei ($a_0 = \text{constant}$);

- secțiunile transversale rămân plane și se rotesc, fiind normale pe generatoarele deformat, confirmând astfel ipoteza lui Bernoulli pentru încovoierea pură.

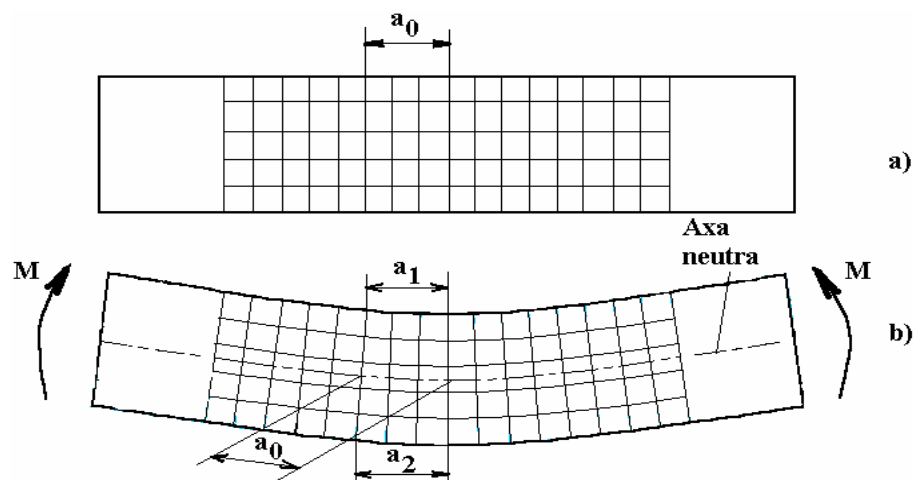


Figura 8.1

În fibrele supuse la solicitări axiale (tracțiune sau compresiune) apar tensiuni normale. În planul neutru tensiunile normale sunt nule, deoarece alungirea fibrelor din acest plan este nulă. Lățimea grinzii deformate se micșorează în partea întinsă și se mărește în cea comprimată, dar rămâne constantă în planul neutru.

8.3. Calculul tensiunilor normale.

Formula lui Navier

Pentru deducerea relației de calcul a tensiunilor normale la solicitarea de încovoiere vor fi parcurse următoarele etapele:

1. Stabilirea legii de variație a alungirilor specifice pe secțiunea transversală a barei, admițând ipoteza lui Bernoulli

Se vor determina tensiunile normale din secțiunea unei grinzi drepte prismatice (se admite că raportul între lungimea grinzii și înălțimea secțiunii este $l/h > 5$) supusă la încovoiere pură (figura 8.2). Pentru determinarea tensiunilor se consideră că materialul grinzii este omogen și izotrop, cu caracteristică liniar-

elasică, adică admite legea lui Hooke. Momentul încovoiător este constant pe lungimea grinzii: $M_z(x) = M = \text{const.}$, iar toate celelalte eforturi sunt nule. În secțiunea grinzii apar *numai tensiuni normale* σ_x .

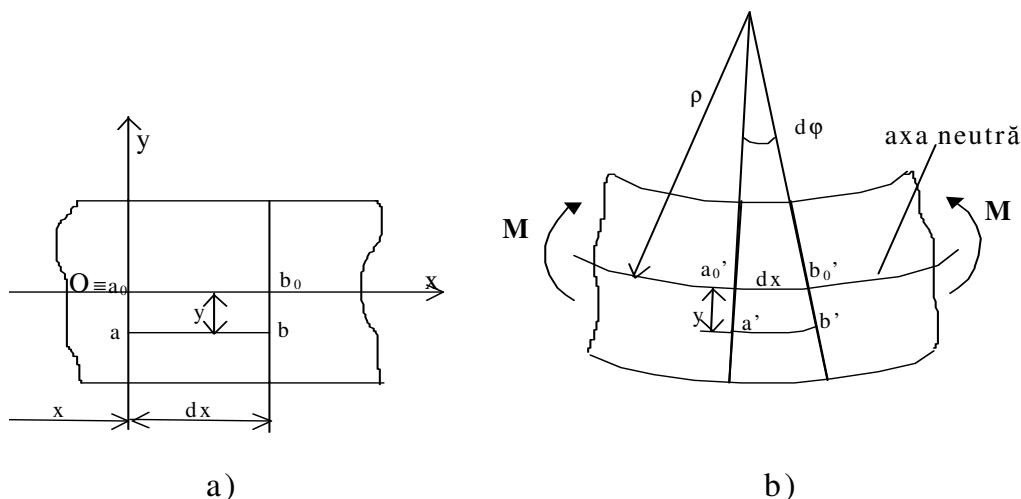


Figura 8.2

Se izolează un element de grindă dreaptă de lungime dx (figura 8.2a). Elementul este raportat la un sistem de referință $Oxyz$, axa Ox fiind orientată în lungul grinzii, iar Oy constituie axa principală centrală de inerție situată în planul forțelor. Se face studiul deformației elementului, când grinda este supusă la încovoiere pură. Prin solicitarea la încovoiere atât grinda cât și elementul de grindă se deformează. Secțiunile transversale se rotesc. Unghiul $d\phi$ format de cele două secțiuni situate la distanța dx una de alta se numește *rotire elementară* și se măsoară în radiani. În figura 8.2b s-a notat cu ρ raza de curbură a axei neutre (deocamdată nu se va ține cont de semnul curburii $1/\rho$).

Se consideră o fibră $[ab]$ situată la distanța y de axa grinzii. Alungirea specifică a acestei fibre este:

$$\epsilon_x = \frac{\text{arc}(a'b') - [ab]}{[ab]} = \frac{(\rho + y)d\phi - dx}{dx} \quad (8.1)$$

Deoarece axa neutră nu își modifică lungimea după deformarea grinzii (la fel ca toate fibrele cuprinse în planul neutru) se poate scrie:

$$[a_0 b_0] = [a'_0 b'_0] \quad \text{sau} \quad dx = \rho d\varphi \quad (8.2)$$

Înlocuind (8.2) în relația (8.1) rezultă:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (8.3)$$

Relația obținută arată că *alungirea specifică variază liniar pe înălțimea secțiunii* (pe direcția axei **Oy**).

2. Stabilirea legii de variație a tensiunilor

Din legea lui Hooke alungirea specifică se poate exprima ca:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (8.4)$$

S-a admis că materialul grinzii are același modul de elasticitate E la tracțiune și compresiune. Din (8.3) și (8.4) rezultă:

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} y \quad (8.5)$$

Se observă că și *tensiunea normală σ_x este funcție liniară de y* . Reprezentarea grafică a modului de variație a tensiunii este indicată în figura 8.3. Tensiunea este nulă pe axa neutră, este pozitivă în fibrele tracționate și negativă pentru fibrele care sunt comprimate.

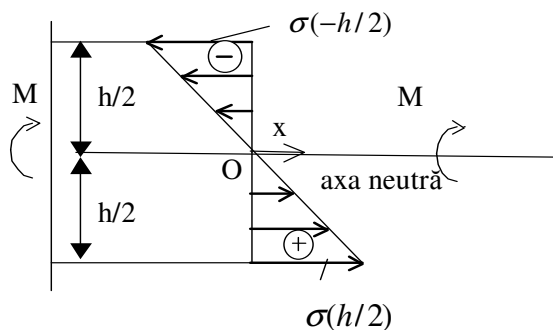


Figura 8.3

3. Deducerea relației între tensiuni și eforturi, pornind de la ecuațiile de echivalență

Se iau în considerație *ecuațiile de echivalență* (2.16), (2.20) și (2.21) în care se înlocuiește (8.5). Rezultă:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0 \quad (8.6)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{\rho} \int_A y z dA = \frac{E}{\rho} I_{zy} = 0 \quad (8.7)$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z = M \quad (8.8)$$

Celelalte trei ecuații de echivalență nu au fost scrise deoarece ele se referă la tensiunile tangențiale care sunt nule.

Deoarece $E/\rho \neq 0$ din (8.6) și (8.7) rezultă:

$$S_z = 0; \quad I_{zy} = 0 \quad (8.9)$$

Plecând de la *relația* (8.9) se constată următoarele:

- *momentul static* S_z este nul numai dacă axa Oz trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale (vezi *relația* 1.3). Rezultă că sistemul yOz este unul central, iar *axa neutră* Ox trece prin centrele de greutate ale secțiunilor transversale;

- *momentul de inerție centrifugal* I_{zy} este nul numai dacă secțiunea transversală are cel puțin o axă de simetrie, iar sistemul de coordonate yOz este un sistem principal (axele Oy și Oz sunt axe principale).

După cum s-a precizat în *paragraful* 1.1.3.2 orice axă de simetrie este și axă principală de inerție. Dacă secțiunea are cel puțin o axă de simetrie atunci momentul de inerție centrifugal este nul. Axa de simetrie conține și centrul de greutate al secțiunii. Rezultă că *sistemul de axe al secțiunii transversale este unul principal central*. În consecință, *efortul* M_z este orientat după axa Oz , care este și axă principală de inerție.

Egalând expresiile lui E/ρ determinate din (8.5) și (8.8) rezultă:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y$$

(8.190)

*Egalitatea (8.10) poartă numele de **relația lui Navier**.*

Deoarece în cazul încovoierii pure a grinzilor drepte de secțiune constantă efortul M_z este constant, rezultă că tensiunea σ_x este funcție numai de y : este *nulă* în planul neutru, care conține și axa neutră ($y = 0$) și este *maximă* sau *minimă* pe fața inferioară și respectiv superioară a grinzilor (*figura 8.4*). În calculele de rezistență interesează tensiunile normale σ_x maxime și minime, care apar în fibrele cele mai îndepărtate de axa neutră.

Dacă Oz este *axă de simetrie*, atunci $y_1 = y_2 = y_{max}$ și modulul de rezistență se poate scrie:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \quad (8.11)$$

unde: y_{max} - distanța de la axa Oz la fibra cea mai îndepărtată a secțiunii.

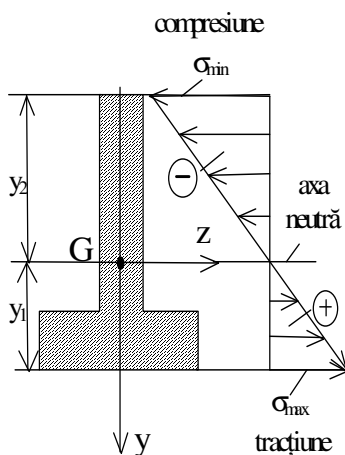


Figura 8.4

Pentru o grindă confecționată dintr-un material tenace ($\sigma_{at} = \sigma_{ac}$), cu secțiuni transversale la care Oz este axă de simetrie, *relația lui Navier* se utilizează sub următoarea formă:

$$\sigma_{x,max} = \frac{M_z}{W_z} \quad (8.12)$$

Dacă axa Oz nu este o axă de simetrie atunci:

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1}; \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} \quad (8.13)$$

Pentru materiale având limita de curgere la tracțiune σ_{at} diferită de cea la compresiune σ_{ac} , se determină atât tensiunea maximă (la tracțiune) cât și cea minimă (la compresiune). Pentru dimensionare se vor limita atât tensiunile maxime cât și cele minime. Valorile raționale pentru y_1 și y_2 se obțin din condițiile $\sigma_{max} = \sigma_{at}$, $|\sigma_{min}| = \sigma_{ac}$. Cu notațiile (8.13), relația (8.12) poate fi scrisă:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M_z}{W_{z1}} \leq \sigma_{at} \\ |\sigma_{min}| &= \left| -\frac{M_z}{W_{z2}} \right| \leq \sigma_{ac} \end{aligned} \quad (8.14)$$

La încovoierea simplă, momentul M_z variază de obicei pe lungimea grinzii. Tensiunea normală va fi o funcție de două variabile și formula lui Navier poate fi rescrisă astfel:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{M_z(x)}{I_z} y \quad (8.15)$$

Valoarea momentului $M_z(x)$ se determină din diagrama de efort.

Pentru efectuarea calcului de rezistență tensiunile maxime în modul nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă:

$$|\sigma_x|_{max} \leq \sigma_a \quad (8.16)$$

Pentru grinzile de secțiune constantă, tensiunea maximă se va produce în secțiunea în care momentul este maxim ($M_{z,max}$). La grinzile cu secțiune variabilă, tensiunea maximă se poate produce și în alte secțiuni.

Observații:

1) Cu toate că formula lui Navier a fost dedusă pentru solicitarea la încovoiere pură, ea este utilizată, în anumite condiții, și pentru calculul tensiunilor normale care apar în grinzile supuse la încovoiere simplă. În acest caz, este necesar ca, pe lângă condițiile menționate mai sus, axa Oy să fie axa de simetrie a secțiunii transversale iar planul xOy să conțină toate forțele tăietoare (încovoiere plană).

2) Formula lui Navier dă rezultate acceptabile chiar în cazul grinzilor lungi, care prezintă o variație lentă a secțiunii transversale pe lungimea grinzii. În cazul unor variații bruște a secțiunii apare fenomenul concentrării tensiunilor și tensiunile maxime în modul sunt mai mari decât cele calculate cu această formulă.

3) În cazul încovoierii simple, în secțiunea transversală a grinzii apar și forțe tăietoare și deci și tensiuni tangențiale.

4) La grinzile lungi ($l / h > 10$) cu secțiune masivă, supuse la încovoiere simplă, distrugerea este provocată de către tensiunile normale. În asemenea cazuri, tensiunile tangențiale pot fi neglijate. Din contră, în cazul grinzilor scurte sau a celor cu secțiune compusă, tensiunile tangențiale pot avea un rol predominant în distrugerea grinzii.

5) În cazul profilelor laminate, caracteristicile geometrice W_z sunt indicate în tabele.

6) Pentru calculul de dimensionare se determină dimensiunea caracteristică a secțiunii transversale, rezolvând inecuația (8.16). La calculul de verificare, sensul inegalității (8.16) se păstrează dacă grinda rezistă.

Secțiuni raționale pentru încovoiere

Repartiția tensiunilor normale pe secțiunea transversală a grinzii este liniară, conform formulei lui Navier (relația 8.10).

Axa neutră Oz trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale și este conținută în planul neutru. Dacă axa Oz este axă de simetrie a secțiunii (este la

distanță egală de fețele superioară și inferioară a grinzii) tensiunile extreme vor fi egale în modul (*figura 4.3*). Observația este valabilă pentru grinzile din materiale cu rupere tenace, la care tensiunile de curgere la tracțiune și compresiune sunt egale în modul. Pentru asemenea materiale se adoptă secțiuni cu două axe de simetrie.

Dacă, de exemplu, axa Oz , trece prin centrul de greutate al secțiunii și este mai apropiată de una din fețele grinzii (vezi *figura 8.4*) scad tensiunile normale pozitive (de tracțiune) și cresc în modul cele negative (de compresiune). Soluția este însă avantajoasă pentru materiale cu rupere fragilă, care au tensiunile de rupere la tracțiune mult mai mici decât modulul tensiunii de rupere la compresiune. O secțiune rațională pentru o grindă confecționată din aceste materiale trebuie să aibă centrul de greutate astfel amplasat încât să se atingă simultan σ_{at} și σ_{ac} în secțiunea periculoasă. Pentru materiale cu rupere fragilă se vor adopta secțiuni cu o singură axă de simetrie.

Se observă că tensiunile normale sunt nule în planul neutru și au valori mici în vecinătatea acestuia. Din acest considerent secțiunile raționale ale grinzilor solicitate la încovoiere trebuie să aibă puțin material în vecinătatea planului neutru și mai mult material la distanță de acesta, acolo unde tensiunile normale au valori mari în modul (de exemplu secțiunile tip I, tip cheson). Grinzile cu secțiuni raționale au greutatea mai mici.

8.4. Calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă. Formula lui Juravski

Așa cum s-a precizat, în cazul încovoierii simple, în secțiunea grinzii apar atât tensiuni normale (care vor fi determinate tot cu formula lui Navier, în condițiile prezentate mai sus) cât și tensiuni tangențiale. Relația pentru calculul tensiunilor tangențiale va fi determinată în cele ce urmează.

Se consideră o grindă de secțiune dreptunghiulară (Oy este axă de simetrie a secțiunii transversale), solicitată la încovoiere simplă (*figura 8.5a,b*). Se

izolează din grindă un element de lungime dx . (figura 8.5c). În cele două secțiuni care delimitează elementul apar momentele încovoietoare $M_z(x)$ (în secțiunea x), respectiv $M_z(x)+dM_z$ și forța tăietoare T_y considerată constantă. Tensiunile normale în cele două secțiuni, $\sigma_x(y)$, în $A-A$ și $\sigma_x(y)+d\sigma$ în $B-B$, sunt repartizate liniar și pot fi calculate cu formula lui Navier.

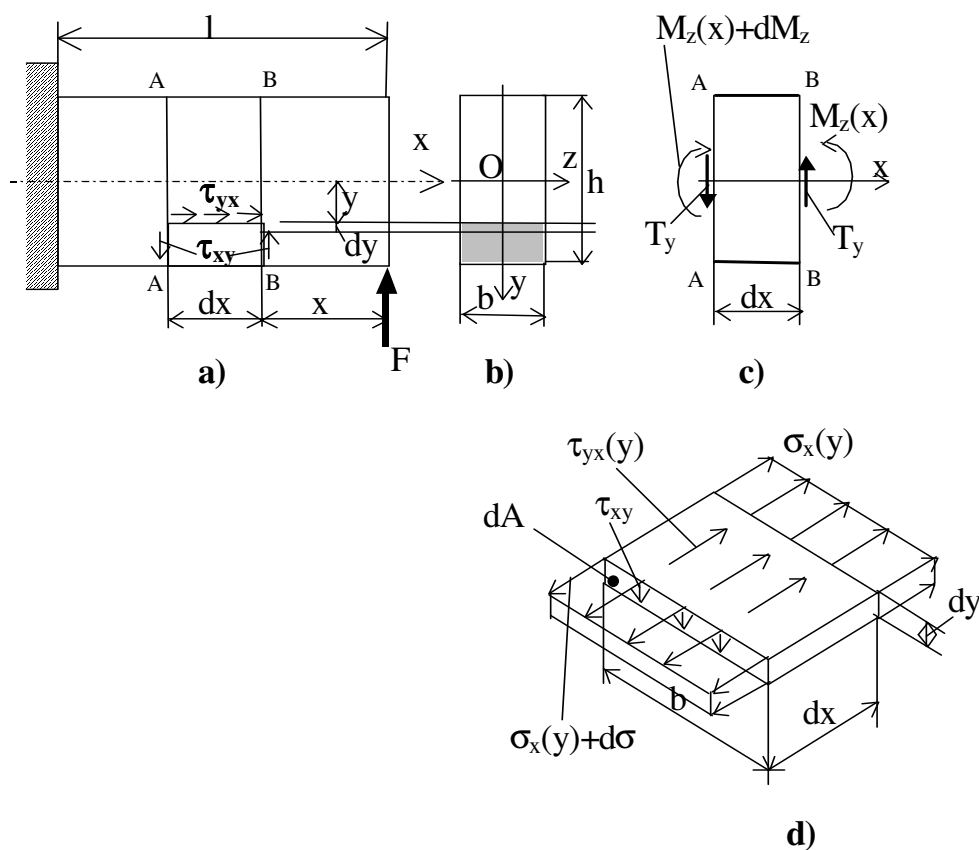


Figura 8.5

Din relațiile diferențiale dintre eforturi (2.12) se știe că forța tăietoare este derivata momentului încovoietor:

$$T_y(x) = \frac{dM_z(x)}{dx} \quad (8.17)$$

În secțiunile **A-A** și **B-B** apar, pe lângă tensiunile normale σ_x , și tensiuni tangențiale τ_{xy} . Se face o secțiune orizontală prin grindă, cu un plan paralel cu xOz , la distanța y față de axa neutră și se izolează elementul de volum marcat cu gri în *figura 8.5b*. Conform principiului dualității tensiunilor tangențiale în planul orizontal apar tensiuni tangențiale egale în modul $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$.

Pe fața inferioară a elementului izolat nu există tensiuni tangențiale, deoarece este o față liberă a grinzii. Conform principiului dualității tensiunilor tangențiale tensiunile τ_{xy} vor fi de asemenea nule în vecinătatea muchiilor superioare și inferioare ale secțiunii grinzii.

Pentru deducerea formulei lui **Juravski** se admit toate ipotezele utilizate la deducerea relației lui Navier. În plus s-au mai făcut următoarele ipoteze:

- în orice punct al secțiunii, tensiunile tangențiale τ_{xy} sunt paralele cu forța tăietoare;

- tensiunile τ_{xy} sunt constante în planul orizontal. În consecință și tensiunea τ_{xy} este constantă pe fațetele de laturi b și dy ale elementului de volum. Altfel spus, tensiunea τ_{xy} este funcție numai de variabila y .

Se scrie echilibrul elementului de volum izolat cu ajutorul ecuației de proiecție a forțelor pe direcția **Ox**:

$$\int_{A_y} \sigma_x dA + \tau_{xy} b dx - \int_{A_y} (\sigma_x + d\sigma) dA = 0 \quad (8.18)$$

unde: $dA = b \cdot dy$.

După efectuarea calculelor din *relația (8.18)* rezultă:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \int_{A_y} \frac{d\sigma}{dx} dA \quad (8.19)$$

Derivând formula lui Navier (8.10), se obține:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{dM_z(x)}{dx} \cdot \frac{y}{I_z} \quad (8.20)$$

Ținând cont de (8.17) *relația (8.20)* devine:

$$\frac{d\sigma}{dx} = T_y \cdot \frac{y}{I_z} \quad (8.21)$$

Din (8.19) și (8.21) rezultă::

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{bI_z} \int_{A_y} y dA \quad (8.22)$$

Se notează cu:

$$S_z = \int_{A_y} y dA \quad (8.23)$$

momentul static al suprafeței marcată cu gri în figura 8.11b față de axa Oz . Cu aceasta relația (8.22) devine:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x)}{b} \frac{S_z(y)}{I_z} \quad (8.24)$$

unde: I_z - momentul de inerție al întregii secțiuni a grinzii față de axa Oz .

Relația (8.24) se numește **formula lui Juravski**.

Observație:

1. Se poate arăta că momentul static S_z al suprafeței de deasupra secțiunii y (marcată cu gri în figura 8.5b) este egal cu momentul static al suprafeței de sub secțiune, originea sistemului fiind în centrul de greutate al secțiunii.

2. Ipotezele făcute la deducerea formulei lui Juravski se apropie mult de realitate în cazul secțiunilor dreptunghiulare. Pentru alte secțiuni decât cea dreptunghiulară tensiunea tangențială nu are numai componenta τ_{xy} , paralelă cu forța tăietoare.

Cu un anumit grad de aproximare, formula lui Juravski poate fi extinsă și la alte secțiuni decât cea dreptunghiulară sub forma:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{T_y(x)}{b(y)} \frac{S_z(y)}{I_z} \quad (8.25)$$

Într-o secțiune a grinzii (pentru un x fixat) se determină de obicei $\tau_{xy}(y)$ cu formula:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y}{b(y)} \frac{S_z(y)}{I_z} \quad (8.26)$$

unde: T_y - forța tăietoare din secțiunea x (se ia din diagrama de forțe tăietoare);

$S_z(y)$ - momentul static al suprafeței aflată deasupra sau sub secțiunea y , față de axa Oz (care trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale);

$b(y)$ - lățimea fibrei în secțiunea în care se calculează tensiunea tangențială;

I_z - momentul de inerție al întregii figuri, față de axa Oz .

Aplicații

Să se determine legea de variație a tensiunilor tangențiale la următoarele secțiuni. Forța T_y este cunoscută (se alege din diagrama de forțe tăietoare).

1. Secțiune dreptunghiulară (figura 8.6)

Pentru secțiunea dreptunghiulară se poate scrie:

$$b(y) = b; \quad I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (8.27)$$

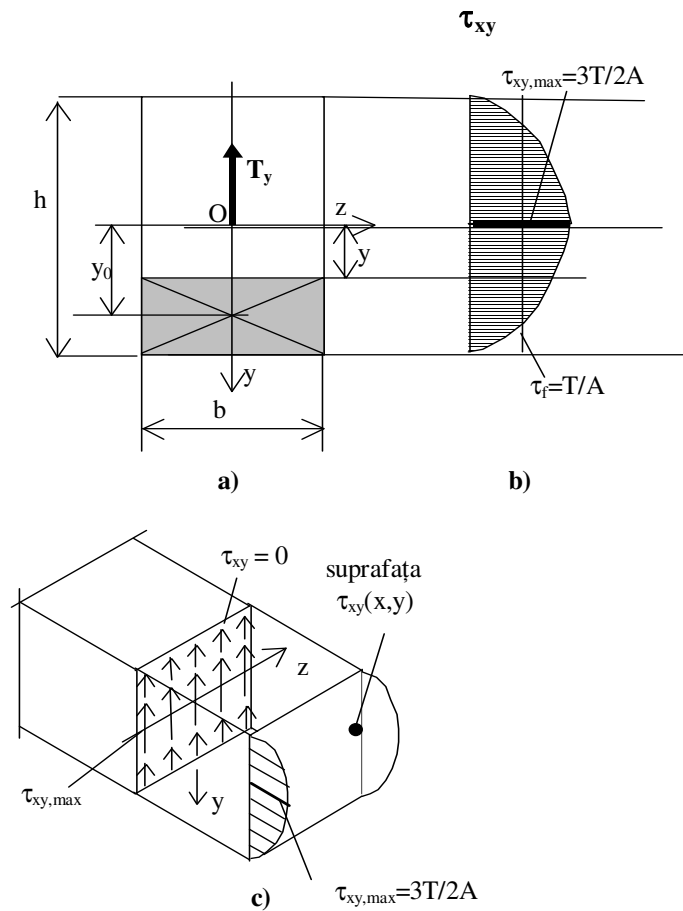


Figura 8.6

Se calculează $S_z(y)$, pentru suprafața hașurată în *figura 8.6a*:

$$S_z(y) = A_y y_0 = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (8.28)$$

Înlocuind (8.27) și (8.28) în (8.26), se obține:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{T_y}{b} \frac{12}{bh^3} \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

sau după efectuarea calculelor se obține:

$$\tau_{xy}(y) = 6 \frac{T_y}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (8.29)$$

Relația (8.29) indică o variație parabolică a funcției $\tau_{xy}(y)$. La capetele intervalului pentru $y = \pm h/2$ se observă că $\tau_{xy} = 0$, iar pentru $y = 0$ tensiunea tangențială are o valoare maximă:

$$\tau_{xy \max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} \quad (8.30)$$

Dar $b \cdot h = A$, și prin urmare *relația* (8.30) devine:

$$\tau_{xy \max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} \quad (8.31)$$

Diagrama de variație a tensiunii tangențiale este reprezentată în *figura 8.6b*.

Se reamintește că în calculul convențional la forfecare s-au considerat tensiunile τ_{xy} constante pe secțiunea barei (s-a determinat tensiunea tangențială cu relația $\tau_f = T/A$). În acest fel s-a subapreciat cu 50% valoarea maximă a tensiunii: $\tau_{xy, \max} = 3\tau_f/2$ (*figura 8.6b*). Valoarea corectă a tensiunii tangențiale maxime, dată de *relația* (8.31), poate fi considerată și pentru calculul convențional la forfecare.

Din diagrama de variație (*figura 8.6c*) se observă că tensiunile τ_{xy} prezintă un punct de maxim în planul neutru ($y = 0$), acolo unde am văzut ca tensiunea normală $\sigma_x = 0$. De asemenea, tensiunile normale σ_x sunt maxime în modul în fibrele cele mai îndepărtate de planul neutru ($y = \pm h/2$), acolo unde $\tau_{xy} = 0$. Rezultă că în planul neutru există o solicitare la *forfecare pură*, iar pentru $y =$

$\pm h/2$ o solicitare la **tracțiune** și respectiv **compresiune pură**. Pentru alte valori ale variabilei y se va produce o **solicitare compusă** (forfecare cu solicitări axiale).

2. Secțiune circulară (figura 8.7)

Pentru secțiunea circulară avem:

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4} \quad (8.32)$$

Pentru această secțiune este mai convenabil să se lucreze în coordonate polare.

Din *figura 8.7* se poate scrie:

$$b(y) = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha; \quad y = R \cdot \cos \alpha; \quad dy = -R \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha; \quad dA = b(y) \cdot dy \quad (8.33)$$

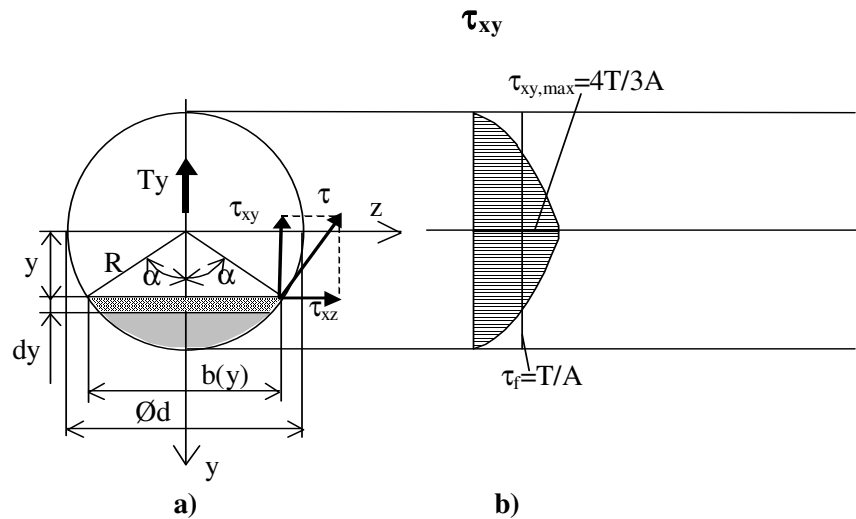


Figura 8.7

Se calculează momentul static al suprafeței hașurate din *figura 8.7a* față de axa Oz :

$$S_z = \int_A y dA = \int_y^R y b(y) dy = - \int_{\alpha}^0 2R^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha \quad (8.34)$$

după efectuarea calculelor se obține:

$$S_z = 2R^3 \int_0^{\alpha} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha \quad (8.35)$$

Înlocuind (8.32) și (8.35) în (8.26) se obține:

$$\tau_{xy}(\alpha) = \frac{T_y}{2R \sin \alpha} - \frac{4}{\pi R^4} \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \alpha \quad (8.36)$$

Din (8.36) rezultă:

$$\tau_{xy}(\alpha) = \frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \sin^2 \alpha \quad (8.37)$$

unde: $A = \pi \cdot R^2$ - aria secțiunii circulare.

Din (8.33) se poate scrie: $\cos \alpha = \frac{y}{R}$. Se știe că: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$. Prin urmare:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2 \quad (8.38)$$

Din (8.37) și (8.38) rezultă:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \left[1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2 \right] \quad (8.39)$$

Relația (8.39) reprezintă ecuația unei parabole. Funcția de variație a tensiunii $\tau_{xy}(y)$ este prezentată în figura 8.7b. Tensiunile tangențiale sunt nule în fibrele extreme (pentru $y = \pm R$) și maxime în planul neutru (pentru $y=0$). Pentru secțiunea circulară valoarea maximă a tensiunii este:

$$\tau_{xy \max} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \quad (8.40)$$

La calculul convențional la forfecare tensiunile tangențiale s-au considerat constante pe secțiunea barei și egale cu $\tau_f = T/A$. În acest fel s-a făcut o subestimare a tensiunii maxime cu circa 33% ($\tau_{xy, \max} = (4/3) \cdot \tau_f$). Valoarea tensiunii tangențiale maxime calculată cu (8.40) poate fi folosită și în calculul de rezistență la forfecare a barelor de secțiune circulară.

3) Profilul "I" (figura 8.8)

Secțiunea fiind simetrică și diagrama $\tau_{xy}(y)$ va fi simetrică. În consecință, se va trasa diagrama numai pentru jumătatea inferioară a profilului ($y > 0$), iar

pentru jumătatea superioară prin simetrie. Secțiunea din *figura 8.8* a fost studiată în *Exemplul 1.3* și s-a calculat momentul de inerție ca fiind $I_z = 1492t^4$.

Spre deosebire de aplicațiile anterioare, nu există o singură lege de variație a mărimilor $b(y)$ și $S_z(y)$. Lățimea fibrei este constantă pe domenii:

- pentru $y_1 \in [0, 7t]$ $b(y_1) = 2t$;
- pentru $y_2 \in [7t, 9t]$ $b(y_2) = 8t$.

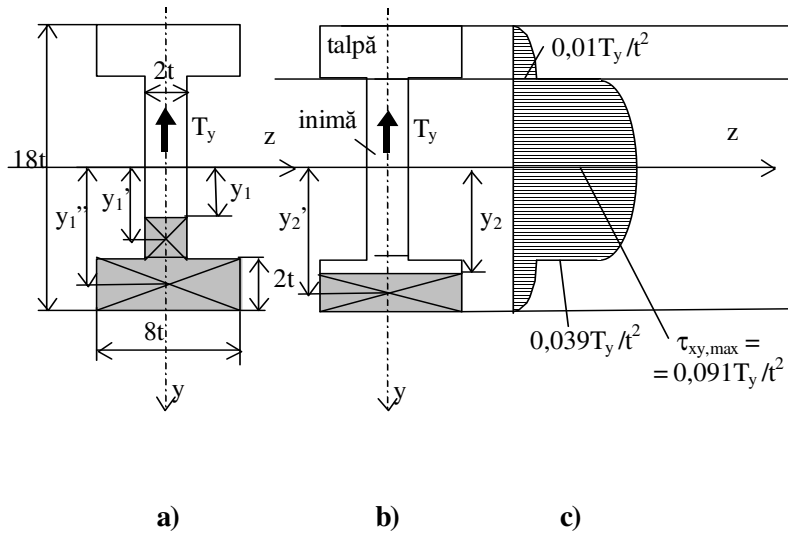


Figura 8.8

Se calculează momentul static S_z pentru suprafețele hașurate în *figurile 8.8a* și respectiv *8.8b*. Suprafața hașurată din *figura 8.8a* se împarte în două dreptunghiuri și se calculează momentul static al suprafeței ca sumă a momentelor statice a celor două suprafețe:

$$S_z(y_1) = 2t \cdot (7t - y_1) \cdot y_1' + 8t \cdot 2t \cdot y_1''$$

$$S_z(y_1) = 2t(7t - y_1) \left(y_1 + \frac{7t - y_1}{2} \right) + 8t \cdot 2t \cdot 8t = t[(7t)^2 - y_1^2] + 128t^3 \quad (8.41)$$

Pentru suprafața hașurată din *figura 8.8b* momentul static este:

$$S_z(y_2) = 8t(9t - y_2) y_2' = 8t(9t - y_2) \left(y_2 + \frac{9t - y_2}{2} \right)$$

$$S_z(y_2) = 4t[(9t)^2 - y_2^2] \quad (8.42)$$

Se aplică formula lui Juravski și se determină legea de variație a tensiunilor tangențiale pe cele două domenii:

- pentru $y_1 \in [0, 7t]$

$$\tau_{xy}(y_1) = \frac{T_y}{I_z} \frac{S_z(y_1)}{b(y_1)} = \frac{T_y}{1492t^4} \left\{ \frac{1}{2} [(7t)^2 - y_1^2] + 64t^2 \right\} \quad (8.43)$$

- pentru $y_2 \in [7t, 9t]$

$$\tau_{xy}(y_2) = \frac{T_y}{I_z} \frac{S_z(y_2)}{b(y_2)} = \frac{T_y}{1492t^4} \left\{ \frac{1}{2} [(9t)^2 - y_2^2] \right\} \quad (8.44)$$

Funcțiile $\tau_{xy}(y_1)$ și $\tau_{xy}(y_2)$ reprezintă două parabole care sunt figurate în figura 8.8c.

În diagrama de variație a tensiunii tangențiale se remarcă saltul produs la trecerea între domenii (între inima profilului și tălpi). Inima profilului preia aproape toată forța tăietoare (circa 95-98%), contribuția tălpilor fiind minimă. Dacă trecerea între inimă și tălpi s-ar face prin racordări, diagrama $\tau_{xy}(y)$ din figura 8.8c va prezenta o variație continuă, fără salturi. Tensiunea maximă $\tau_{xy,max}$ este localizată tot în planul neutru.

8.5. Energia potențială de deformare

Expresia energiei potențiale de deformare, luând în considerație numai tensiunile normale, este data de relația 4.16:

$$U = \int_V dU_1 = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV$$

unde $dV = dA \cdot dx$.

La solicitarea de încovoiere tensiunile normale se determină cu formula lui Navier (relația 8.10). Înlocuind această relație în expresia energiei potențiale rezultă:

$$U = \frac{1}{2E} \int_V \frac{M_z^2(x)y^2}{I_z^2} dV = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{I_z^2} dx \int_A y^2 dA \quad (8.45)$$

Integrala pe suprafață reprezintă tocmai momentul de inerție axial I_z (vezi *relația 1.7*). Făcând înlocuirea și efectuând calculele se poate scrie succesiv:

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2(x) I_z}{I_z^2} dx \quad (8.46)$$

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx \quad (8.47)$$

unde: $M_z(x)$ - expresia momentului încovoietor;

l - lungimea regiunii grinzii.

Expresia (8.47) a energiei este valabilă pentru o regiune a grinzii. Energia potențială de deformare a întregii grinzi se obține prin însumarea algebrică a energiilor calculate pe cele n regiuni, adică:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i \quad (8.48)$$

În cazul încovoierii simple, la energia potențială de deformare a grinzii își aduc contribuția atât tensiunile normale cât și cele tangențiale. Energia potențială de deformare datorată tensiunilor tangențiale poate fi estimată cu *relația (4.16)*:

$$U = \int_V dU_1 = \int_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$$

unde expresia tensiunii tangențiale este dată de formula lui Juravski (*relația 8.26*). Înlocuind (8.26) în expresia energiei potențiale de deformare rezultă:

$$U = \frac{1}{2GA} \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)} dA \int_0^l T_y^2(x) dx \quad (8.49)$$

Se notează cu:

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b^2(y)} dA \quad (8.50)$$

și reprezintă un coeficientul care depinde de forma secțiunii.

Înlocuind (8.50) în *relația* (8.49) expresia energiei devine:

$$U = k \int_0^l \frac{T_y^2(x)}{2GA} dx \quad (8.51)$$

Energia potențială de deformare a unei grinzi supuse la încovoiere simplă va fi egală cu suma algebrică a energiilor date de *relațiile* (8.47) și (8.51). Prin urmare:

$$U = \int_0^l \frac{M_z^2(x)}{2EI_z} dx + k \int_0^l \frac{T_y^2(x)}{2GA} dx \quad (8.52)$$

Contribuția tensiunilor tangențiale la energia potențială de deformare este semnificativă în cazul grinzilor scurte. În cazul grinzilor lungi, cu secțiuni masive această contribuție este mică și de obicei poate fi neglijată.

8.6. Trasarea diagramelor de eforturi

În expresia tensiunilor normale σ_x (formula lui Navier) și tangențiale τ_{xy} (formula lui Juravski) sunt prezente eforturile $M_z(x)$ și respectiv $T_y(x)$. Rezultă că nu se poate face un calcul de rezistență fără cunoașterea acestor eforturi. Acestea se determină din diagramele de moment încovoietor și forță tăietoare. Pentru *grinzile static determinate* trasarea diagramelor de eforturi implică parcurgerea următoarelor etape:

1) Figurarea și calculul reacțiunilor

Tipurile de reazeme și reacțiunile care apar în acestea au fost prezentate în *Capitolul 2* (vezi *tabelul 2.1*). În cazul grinzilor static determinate, reacțiunile se calculează numai din ecuațiile de echilibru, așa cum s-a prezentat în *Capitolul 2*.

În cazul grinzilor în consolă (încastate la un capăt și libere la celălalt), această etapă poate fi evitată dacă se izolează numai porțiuni de grindă dinspre capătul liber.

2) Împărțirea grinzii în regiuni și figurarea secțiunilor (câte o secțiune prin fiecare regiune)

Pentru fixarea regiunilor și secțiunilor, se va proceda în mod similar ca la trasarea diagramelor de efort la solicitări axiale sau torsiune. Deoarece în general încărcarea grinzilor este mai complexă, se preferă ca porțiunea de grindă izolată să conțină cât mai puține regiuni (secțiunea să fie cât mai aproape de unul din capetele grinzii). Astfel expresia eforturilor va fi mai simplă.

3) *Scrierea expresiilor analitice ale eforturilor în secțiunile fixate și studierea variației acestora*

Se aplică metoda secțiunilor, prezentată în *Capitolul 2*. Cu ajutorul acestei metode, eforturile sunt transformate în vectori exteriori corpului și pot fi determinate cu ajutorul ecuațiilor de echilibru. În fiecare secțiune se scrie expresia momentului încovoietor și a forței tăietoare ținând cont de următoarele definiții ale acestora:

Momentul încovoietor $M_z(x)$, egal cu suma algebrică a proiecției pe direcția Oz a tuturor momentelor de la stânga sau de la dreapta secțiunii.

Forța tăietoare $T_y(x)$, egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe normala la axa barei a tuturor forțelor de la stânga sau de la dreapta secțiunii.

Considerând încastrări în secțiuni determinarea eforturilor poate fi făcută scriind ecuațiile de echilibru pentru oricare din porțiunile de grindă situate în partea stânga sau în partea dreaptă a secțiunii considerate. La determinarea eforturilor sensurile pozitive pentru forțe și momente nu sunt arbitrare, ci trebuie să fie respectate anumite convenții de semn, prezentate în *figura 8.9* (pentru momentul încovoietor) și în *figura 8.10* (pentru forța tăietoare). Acestea sunt în concordanță cu convențiile de semn pentru eforturi, prezentate în *Capitolul 2*.

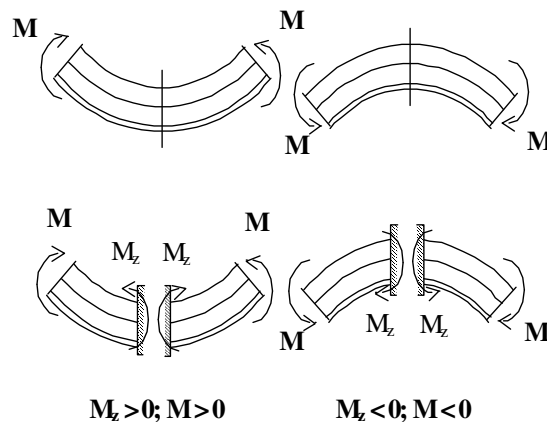


Figura 8.9

Momentele exterioare sunt considerate pozitive dacă bara este curbată astfel încât fibra inferioară (figurată cu linie întreruptă) se află la exteriorul curburii (este sollicitată la tracțiune).

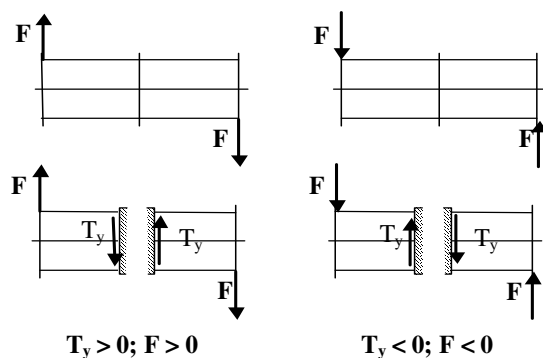


Figura 8.10

Forțele exterioare sunt considerate pozitive atunci când dau un cuplu în sens orar față de secțiune.

Se studiază variația expresiilor astfel obținute pentru momentul încovoietor și pentru forța tăietoare

4) Trasarea diagramelor de eforturi

Funcțiile $M_z(x)$ și $T_y(x)$ se reprezintă grafic în următoarele sisteme de referință:

- pentru $M_z(x)$ valorile pozitive se reprezintă jos (în sensul axei Oy). Alura diagramei $M_z(x)$ sugerează modul în care se deformează grinda (fac excepție grinzile în consolă);
- pentru $T_y(x)$ valorile pozitive se reprezintă în sus (opus sensului axei Oy).

Datorită adoptării sensului axei ordonatelor în jos, trebuie să se țină cont de următoarea regulă privind orientarea concavității curbei:

- dacă $f''(x) > 0$, atunci concavitățile curbei $f(x)$ este orientată în sensul pozitiv al axei ordonatelor;

- dacă $f''(x) < 0$, atunci concavitățile curbei $f(x)$ este orientată în sensul negativ al axei ordonatelor .

5) Verificarea diagramelor

Pentru verificarea diagramelor de eforturi se ține cont de relațiile diferențiale care există între eforturi (*relațiile 2.12*). Deoarece forța tăietoare este derivata momentului, rezultă că între $M_z(x)$ și $T_y(x)$ trebuie să existe relațiile dintre funcție și derivata sa.

Pentru verificarea diagramelor se vor folosi următoarele criterii:

- dacă nu există momente concentrate la capetele grinzii, atunci $M_z(x) = 0$ în aceste secțiuni, iar dacă la un capăt al grinzii există un moment concentrat exterior, în acea secțiune **diagrama** $M_z(x)$ marchează un salt egal în modul cu momentul exterior;

- în secțiunea în care acționează un moment concentrat exterior asupra grinzii, **diagrama** $M_z(x)$ prezintă un salt, egal în modul cu momentul exterior (dacă grinda nu este încărcată cu momente concentrate, atunci **diagrama** $M_z(x)$ nu prezintă salturi);

- în secțiunea în care **diagrama** $M_z(x)$ prezintă un punct de extrem (maxim sau minim), **diagrama** $T_y(x)$ trece prin zero (derivata se anulează);

- dacă $M_z(x)$ este o funcție polinomială, $T_y(x)$ este o funcție cu un grad mai mic;

- dacă se parcurge grinda de la stânga la dreapta, atunci când $M_z(x)$ **crește**, avem $T_y(x) > 0$, iar când $M_z(x)$ **scade** avem $T_y(x) < 0$;

- în secțiunea în care există o forță exterioară normală pe axa barei, în **diagrama** $T_y(x)$ apare un salt egal în modul cu forța exterioară;

- datorită regulilor de semn adoptate, curba $M_z(x)$ are concavitățile în sens contrar forței distribuite $q(x)$ ($q(x)$ “intră” în concavitate);

- la grinzile solicitate la încovoiere cu încărcare și rezemare simetrică, datorită simetriei și a regulilor de semn adoptate, **diagrama de momente $M_z(x)$** va fi simetrică, iar **diagrama $T_y(x)$** antisimetrică. Rezultă că aceste diagrame pot fi trasate numai pe jumătate din lungimea grinzii, iar pe cealaltă jumătate vor fi construite prin simetrie (pentru M_z) sau antisimetrie (pentru T_y);

- la grinzi cu încărcare și rezemare antisimetrice, **diagrama $M_z(x)$** va fi antisimetrică, iar **diagrama $T_y(x)$** va fi simetrică. Rezultă că ele pot fi trasate pe jumătate din lungimea grinzii și apoi completate prin antisimetrie, respectiv prin simetrie.

Aplicații

1) Să se traseze diagramele de eforturi la grinda simplu rezemată, solicitată cu un moment concentrat M (figura 8.11).

Se figurează reacțiunile V_1 și V_2 și se calculează aceste reacțiuni din ecuațiile de echilibru:

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 = 0 \quad (8.53)$$

$$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow V_2 l + M = 0 \Rightarrow V_2 = -\frac{M}{l} \quad (8.54)$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow V_1 l - M = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{M}{l} \quad (8.55)$$

Valorile reacțiunilor verifică *relația* (8.53). Se observă că reacțiunile nu depind de poziția momentului M pe grindă.

În prima regiune se face secțiunea x_1 și se izolează porțiunea de grindă de lungime x_1 . Se scriu eforturile în secțiune:

-pentru $x_1 \in [0, a]$

$$M_z(x_1) = V_1 \cdot x_1; \quad T_y(x_1) = V_1 \quad (8.56)$$

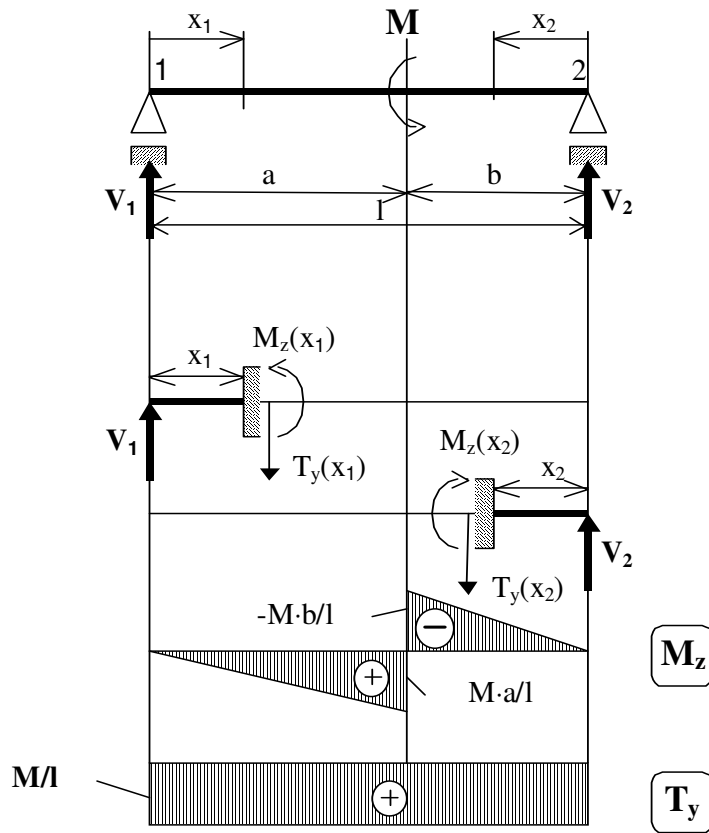


Figura 8.11

În cea de a doua regiunea se face secțiunea x_2 și se scriu eforturile luând în considerație încărcările situate în partea dreapta a secțiunii. Se obține:

- pentru $x_2 \in [0, b]$

$$M_z(x_2) = V_2 \cdot x_2; \quad T_y(x_2) = -V_2 \quad (8.57)$$

Pe ambele regiuni momentul încovoietor are variație liniară, iar forța tăietoare este constantă. Se reprezintă grafic funcțiile M_z și T_y (vezi figura 8.11). Se observă că în diagrama de moment încovoietor, în dreptul momentului exterior M , apare un salt egal în modul cu momentul respectiv.

2) Să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda în consolă, solicitată cu un moment concentrat, din figura 8.12.

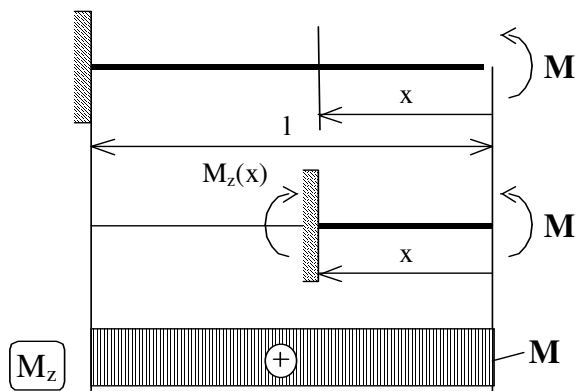


Figura 8.12

Fiind vorba de o bară în consolă, cu o singură regiune, pentru a evita calculul reacțiunilor din încastrare se poate izola porțiunea de grindă situată în partea dreaptă a secțiunii (pornind numai dinspre capătul liber). Porțiunea de grindă izolată se consideră încastrată în secțiune. Momentul M curbează bara în sus, deci este pozitiv (vezi figura 8.9).

În secțiune, pentru $x \in [0, l]$, se poate scrie:

$$M_z(x) = M; \quad T_y(x) = 0 \quad (8.58)$$

În consecință, în grinda considerată apar numai tensiuni normale σ_x (grinda este solicitată la încovoiere pură). Se observă că în **diagrama** $M_z(x)$, în secțiunile în care asupra grinzii acționează momente concentrate, apar salturi egale în modul cu aceste momente. De asemenea nu există o secțiune periculoasă deoarece $\sigma_x = \text{const.}$

3) Să se traseze diagramele de eforturi la grinda simplu rezemată la capete, solicitată cu o forță concentrată (figura 8.13).

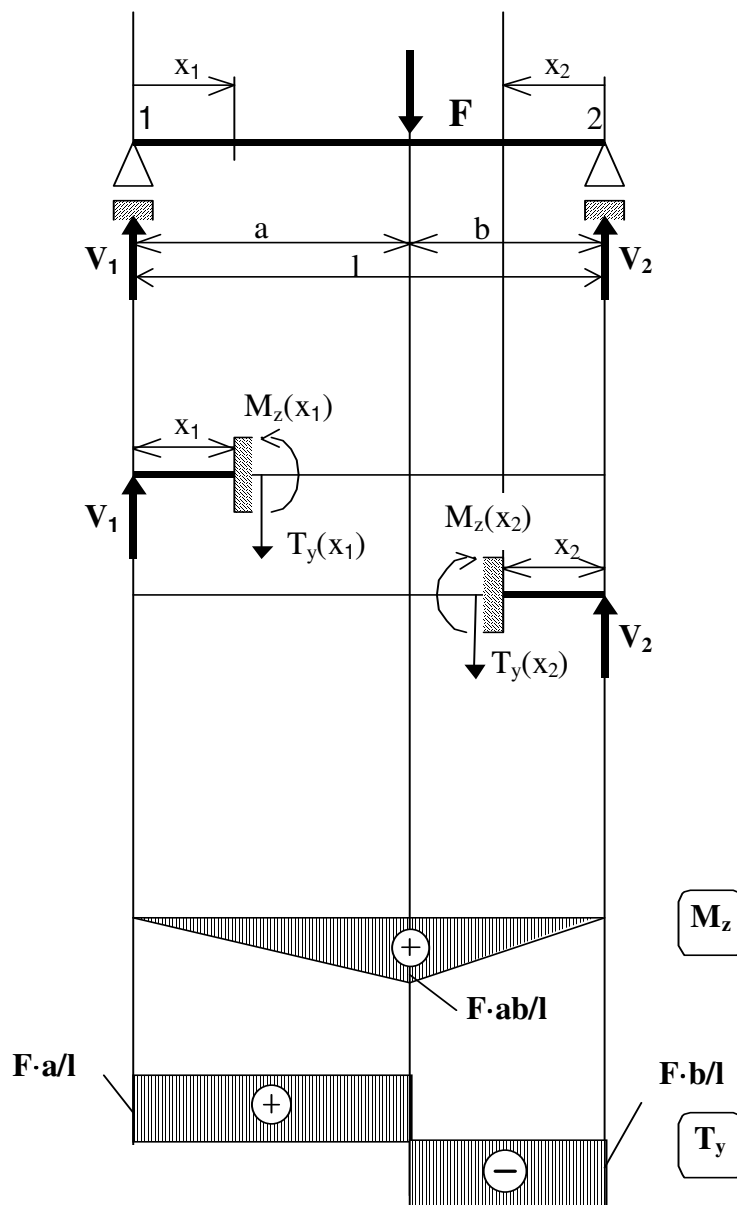


Figura 8.13

Pentru această grindă reacțiunile V_1 și V_2 au fost deja calculate în Capitolul 2, exemplul 3 (vezi figura 2.5). S-au obținut valorile:

$$V_1 = F \frac{b}{l}; \quad V_2 = F \frac{a}{l}$$

Pe cele două regiuni ale grinzii se fac secțiunile x_1 și x_2 . Se scriu eforturile în cele două secțiuni:

-pentru $x_1 \in [0, a]$

$$M_z(x_1) = V_1 \cdot x_1 = \frac{Fb}{l} x_1 \quad (8.59)$$

$$T_y(x_1) = V_1 = \frac{Fb}{l} \quad (8.60)$$

-pentru $x_2 \in [0, b]$

$$M_z(x_2) = V_2 \cdot x_2 = \frac{Fa}{l} x_2 \quad (8.61)$$

$$T_y(x_2) = -V_2 = -\frac{Fa}{l} \quad (8.62)$$

Reprezentarea grafică a funcțiilor $M_z(x)$ și respectiv $T_y(x)$ pe cele două regiuni este prezentată în *figura 8.13*. În diagrama T_y în dreptul forței exterioare concentrate F , apare un salt egal în modul cu forța respectivă.

Observații:

1) Pentru $a = b = l/2$ grinda este simetrică (ca rezemare și încărcare). În consecință, reacțiunile vor fi simetrice și egale cu jumătate din încărcarea pe verticală $V_1 = V_2 = F/2$ și ne putem folosi de această proprietate pentru a evita scrierea ecuațiilor de echilibru.

2) Tot ca o consecință a simetriei și a regulilor de semn adoptate, diagrama $M_z(x)$ va fi simetrică, iar diagrama $T_y(x)$ va fi antisimetrică.

4) Să se traseze diagramele de eforturi la grinda simplu rezemată la capete, încărcată cu forță uniform distribuită din *figura 8.14* (greutatea proprie a unei grinzi de secțiune constantă, confecționată dintr-un material omogen, poate fi considerată o forță uniform distribuită).

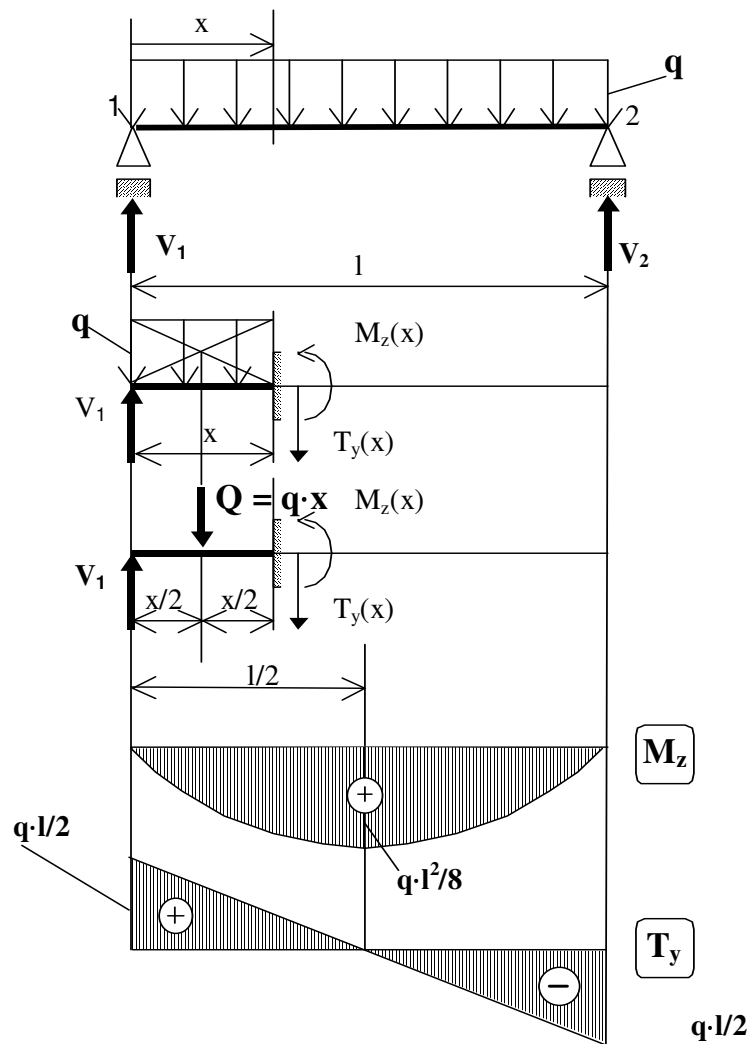


Figura 8.14

Grinda din *figura 8.14* este încărcată și rezemată simetric. Reacțiunile pot fi determinate din ecuațiile de echilibru sau ținând cont de simetrie reacțiunile vor fi simetrice și egale cu jumătate din încărcarea pe verticală:

$$V_1 = V_2 = \frac{ql}{2} \quad (8.63)$$

Se scriu eforturile în secțiunea x , pentru $x \in [0, l]$. Momentul încovoietor, luând în considerație porțiunea de grindă izolată, va fi dat de reacțiunea V_1 care curbează grinda în sus și dă moment pozitiv și de forța distribuită de pe porțiunea

de grindă izolată (un dreptunghi de laturi q și x) care dă moment negativ. Momentul forței distribuite poate fi scris ca momentul dat de către forța concentrată static echivalentă Q , față de secțiune. Forța Q trece prin centrul de greutate al dreptunghiului și are modulul numeric egal cu suprafața dreptunghiului de laturi q și x . Prin urmare expresia momentului încovoietor este:

$$M_z(x) = V_1 x - qx \frac{x}{2} = q \frac{1}{2} x - q \frac{x^2}{2} \quad (8.64)$$

Funcția $M_z(x)$ reprezintă o parabolă. Se studiază variația funcției. Valorile funcției la capetele intervalului sunt $M_z(0) = 0$ și $M_z(l) = 0$. Se studiază punctul de extrem anulând prima derivată:

$$M'_z(x) = q \frac{1}{2} - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (8.65)$$

Derivata de ordinul doi este negativă, deci momentul încovoietor este maxim.

Se calculează valoarea momentului maxim:

$$M_{z_{\max}} = M_z\left(\frac{1}{2}\right) = q \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = q \frac{1^2}{8} \quad (8.66)$$

Expresia forței tăietoare este:

$$T_y(x) = V_1 - qx = \frac{ql}{2} - qx \quad (8.67)$$

Forța tăietoare are o variație liniară. Pentru reprezentarea grafică a dreptei $T_y(x)$ se calculează valoarea funcției în două puncte și anume la capetele grinzii, obținându-se $T_y(0) = ql/2$ și $T_y(l) = -ql/2$.

Se observă din cele două diagrame (*figura 8.14*) că forța tăietoare T_y se anulează la mijlocul grinzii, acolo unde momentul încovoietor $M_z(x)$ are un punct de maxim.

5) Să se traseze diagramele de eforturi la grinda simplu rezemată, din figura 8.15, încărcată cu o forță liniar distribuită.

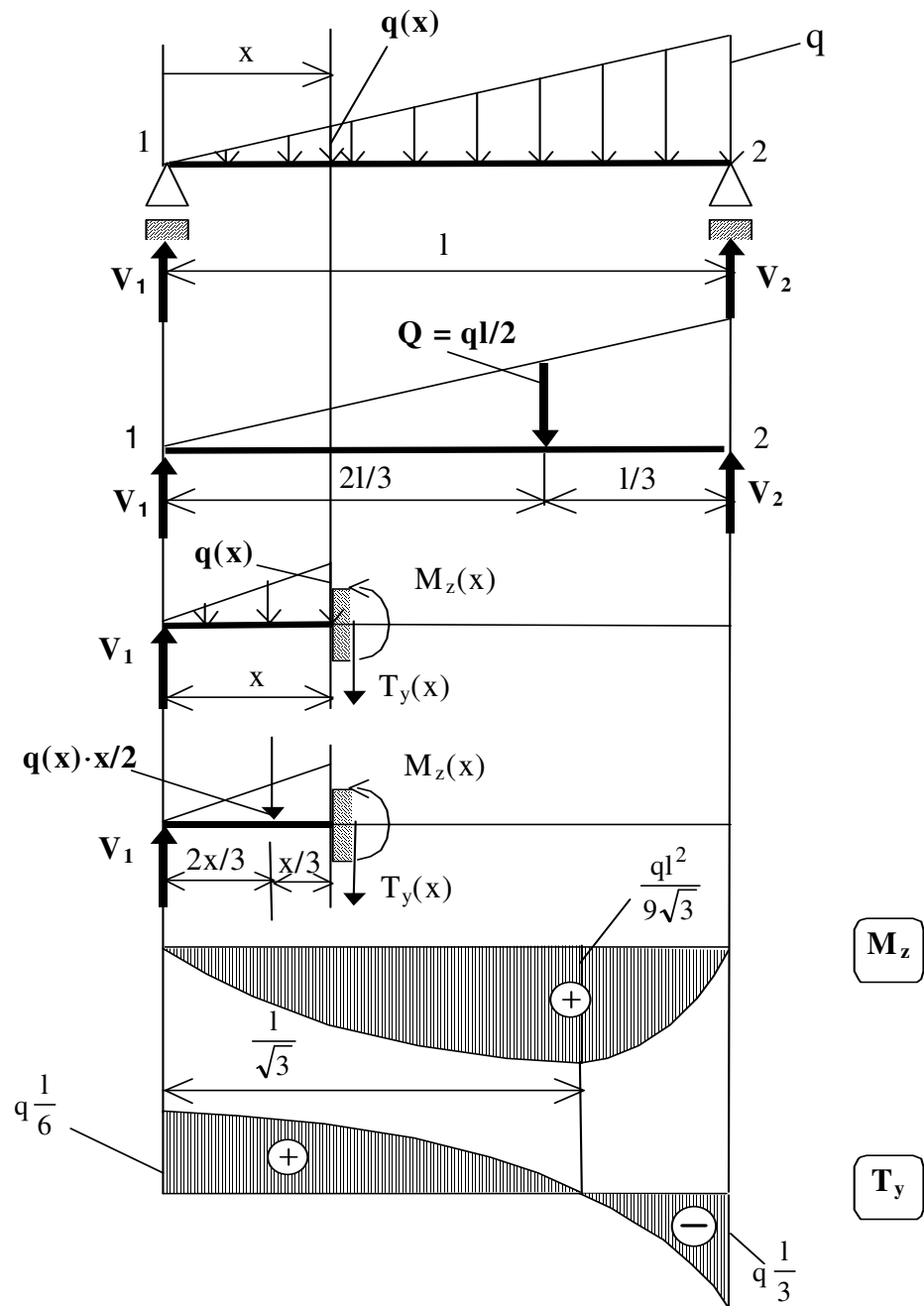


Figura 8.15

Se figurează și se calculează reacțiunile din ecuațiile de echilibru:

$$\sum Y_i = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 - \frac{ql}{2} = 0 \quad (8.68)$$

$$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow V_2 l - \frac{ql}{2} \frac{2l}{3} = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{ql}{3} \quad (8.69)$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow V_1 l - \frac{ql}{2} \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{ql}{6} \quad (8.70)$$

Valorile reacțiunilor V_1 și V_2 verifică relația (8.68).

Este o grindă cu o singură regiune. Se izolează porțiunea de grindă, de lungime x , situată în partea stângă a secțiunii. Se recomandă să se izoleze porțiunea de grindă pe care forța distribuită este reprezentată sub forma unui triunghi (în acest caz expresia eforturilor este mai simplă). Porțiunea de grindă izolată se consideră încastrată în secțiune.

Intensitatea sarcinii în secțiunea x se exprimă din asemănarea triunghiurilor formate după secționare:

$$\frac{q}{l} = \frac{q(x)}{x} \Rightarrow q(x) = \frac{q}{l} x \quad (8.71)$$

În secțiune se scriu eforturile. Pentru $x \in [0, l]$, momentul încovoietor este:

$$M_z(x) = V_1 x - \frac{1}{2} q(x) x \frac{x}{3} = q \frac{1}{6} x - \frac{q}{6l} x^3 \quad (8.720)$$

Momentul încovoietor $M_z(x)$ variază după o parabolă de gradul al treilea. Pentru a studia variația momentului se calculează mai întâi valorile funcției la capetele intervalului și se obține $M_z(0) = 0$, $M_z(l) = 0$. Pentru a determina punctele de extrem se anulează prima derivată a funcției:

$$M'_z(x) = \frac{ql}{6} - \frac{q}{2l} x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,577l \quad (8.73)$$

Derivata de ordinul doi este negativă, deci momentul încovoietor este maxim. Se calculează momentul maxim introducând valoarea lui x din (8.73) în expresia momentului dată de relația (8.72). Se obține:

$$M_{z \max} = M_z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{ql}{6} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6l} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} \quad (8.74)$$

În aceeași secțiune forța tăietoare are următoarea expresie:

$$T_y(x) = V_1 - \frac{q(x)x}{2} = q \frac{1}{6} - \frac{q}{2l} x^2 \quad (8.75)$$

Forța tăietoare $T_y(x)$ este o parabolă de gradul al doilea. Valorile funcției la capetele intervalului vor fi $T_y(0) = V_1 = q \cdot l/6$, $T_y(l) = -q \cdot l/3$. Se anulează derivata întâi și se determină punctele de extrem. Astfel:

$$T_y'(x) = \frac{qx}{l} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (8.76)$$

Valoarea maximă a forței tăietoare este $T_y(0)$ și a fost deja calculată. Se reprezintă grafic funcțiile $M_z(x)$ și $T_y(x)$, în sistemul de axe precizat și se obțin diagramele de eforturi din *figura 8.15*.

8.7. Considerații privind calculul grinzilor sollicitate la încovoiere simplă

Așa cum s-a precizat, în cazul încovoierii simple, în secțiunea transversală a grinzii apar atât tensiuni normale (care vor fi determinate cu formula lui Navier) cât și tensiuni tangențiale (care vor fi determinate cu formula lui Juravski). Din diagramele de variație ale acestor tensiuni s-a văzut că tensiunile normale sunt maxime în modul în fibrele cele mai îndepărtate de planul neutru, acolo unde tensiunea tangențială este nulă. De asemenea tensiunile tangențiale prezintă un punct de maxim în planul neutru, acolo unde am văzut că tensiunea normală este egală cu zero. În alte fibre ale secțiunii grinzii există atât tensiuni normale cât și tensiuni tangențiale.

Se pune problema de a stabili ce raport există între valorile maxime ale celor două tensiuni. Calculul se face pe exemplul particular prezentat în *figura 2.3*. Se consideră secțiunea transversală a grinzii ca fiind dreptunghiulară, respectiv circulară plină.

Secțiunea periculoasă (cea în care tensiunile sunt maxime în modul) este în încastrare. În această secțiune $M_{\max} = Fl$ și $T = F$, iar tensiunile maxime sunt:

a) pentru secțiunea circulară plină:

$$\sigma_{x \max} = \frac{Fl}{W_z}$$

cu modulul de rezistență: $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$.

Prin urmare tensiunea normală maximă este:

$$\sigma_{x \max} = \frac{32Fl}{\pi d^3} \quad (8.77)$$

Particularizând *relația* (8.40) se determină tensiunea tangențială maximă:

$$\tau_{xy \max} = \frac{4 T_y}{3 A} = \frac{16}{3} \frac{F}{\pi d^2} \quad (8.78)$$

b) pentru secțiunea dreptunghiulară modulul de rezistență este $W_z = \frac{bh^2}{6}$

și tensiunea normală maximă devine:

$$\sigma_{x \max} = \frac{Fl}{W_z} = \frac{6Fl}{bh^2} \quad (8.79)$$

Particularizând *relația* (8.31) se determină tensiunea tangențială maximă:

$$\tau_{xy \max} = \frac{3 T_y}{2 A} = \frac{3}{2} \frac{F}{bh} \quad (8.80)$$

Raportul tensiunilor normale și tangențiale maxime se determină din (8.77), (8.78), respectiv (8.79), (8.80). Se obține:

- pentru secțiunea circulară plină

$$\frac{\sigma_{x \max}}{\tau_{xy \max}} = \frac{32Fl}{\pi d^3} \cdot \frac{3\pi d^2}{16F} \quad \text{deci} \quad \frac{\sigma_{x \max}}{\tau_{xy \max}} = 6 \frac{1}{d} \quad (8.81)$$

- pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$\frac{\sigma_{x \max}}{\tau_{xy \max}} = \frac{6Fl}{bh^2} \cdot \frac{2bh}{3F} \quad \text{deci} \quad \frac{\sigma_{x \max}}{\tau_{xy \max}} = 4 \frac{1}{h} \quad (8.82)$$

În cazul grinzilor lungi raportul $l/d \gg 1$, respectiv și $l/h \gg 1$ și prin urmare $\sigma_{x\max} \gg \tau_{xy\max}$. Dacă se consideră pentru cazul studiat că lungimea grinzii este $l=1000\text{mm}$, $d=100\text{mm}$ și $h=80\text{mm}$, atunci pentru secțiunea circulară plină $\sigma_{x\max}=60 \cdot \tau_{xy\max}$, iar pentru secțiunea dreptunghiulară $\sigma_{x\max}=50 \cdot \tau_{xy\max}$. Aceste rezultate indică o valoare neglijabilă a tensiunii tangențiale în comparație cu tensiunea normală și justifică dimensionarea și verificarea grinzilor lungi cu secțiune masivă numai pe baza tensiunii normale maxime.

8.8. Fenomenul de lunecare longitudinală

Se consideră două grinzi drepte identice suprapuse, având secțiunea pătrată (*figura 8.16a*). Grinzile sunt rezemate la capete și încărcate cu o forță concentrată la mijloc. Se vor studia două cazuri:

1. Grinzile nu sunt solidarizate și se neglijează frecarea (*figura 8.16b*).

Solicitând ansamblul la încovoiere simplă cele două grinzi se deformează independent. Dacă forța de frecare între grinzi se neglijează se observă că cele două suprafețe de contact lunecă una față de alta. Acest fenomen se numește *lunecare longitudinală*. El este rezultatul faptului că, pentru fiecare grindă, fibrele de la exteriorul curburii sunt tracționate (își măresc lungimea), iar cele de la interior sunt comprimate (își micșorează lungimea). Prin urmare cele două grinzi lucrează independent, lunecând una față de alta. Repartiția tensiunilor σ_x (calculate cu formula lui Navier) și τ_{xy} (calculate cu formula lui Juravski) este prezentată în *figura 8.16b*. Momentul încovoietor capabil care poate fi preluat de sistemul format din cele două grinzi neîmbinate se determină prin sumarea momentelor capabile ale grinzilor componente și este:

$$M_{z\text{capl}} = 2\sigma_a W_{z1} \quad (8.83)$$

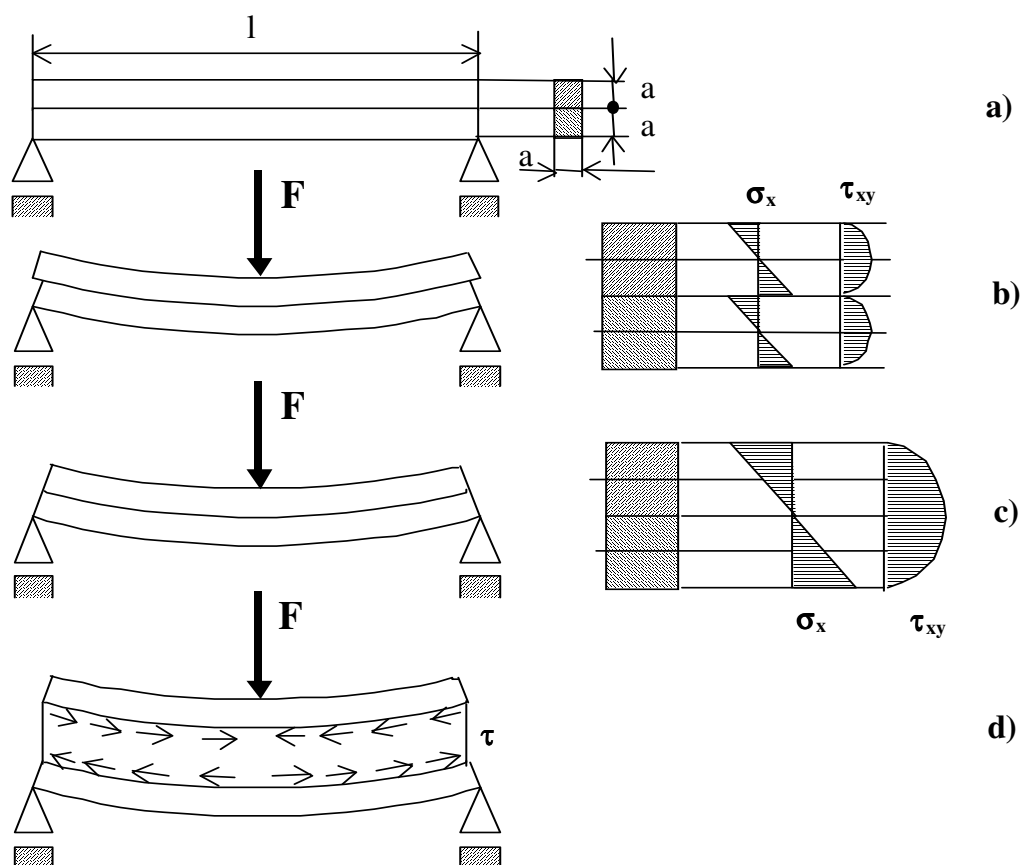


Figura 8.16

unde: W_{z1} - modulul de rezistență axial pentru o singură grindă (din cele două suprapuse). Înlocuind W_{z1} în relația (8.83) rezultă:

$$M_{zcap1} = \frac{1}{3} \sigma_a a^3 \quad (8.84)$$

2. Cele două grinzi vor fi solidarizate (figura 8.16c)

Atunci când grinzile sunt solidarizate, lunecarea longitudinală este împiedicată (de către elementele de solidarizare) și grinzile lucrează împreună la încovoiere ca o singură grindă. Repartiția tensiunilor σ_x și τ_{xy} este prezentată în figura 8.16c. Momentul capabil al grinzii solidarizate este:

$$M_{zcap2} = \sigma_a W_{z2} \quad (8.85)$$

unde W_{z2} - modulul de rezistență al întregii secțiuni compuse. Înlocuind W_{z2} în relația (8.85) se obține:

$$M_{zcap2} = \frac{2}{3} \sigma_a a^3 \quad (8.86)$$

Rezultă că grinda solidarizată poate prelua (pentru cazul considerat) un moment încovoietor capabil dublu comparativ cu cea nesolidarizată. Altfel spus, prin solidarizarea grinzilor suprapuse și prin împiedicarea lunecării longitudinale se obțin grinzi cu capacitate portantă mai mare (grinzi mai rezistente), în timp ce grinzile nesolidarizate se utilizează pentru a obține deformații mari.

Din figura 8.16d se observă că între elementele solidarizate apar tensiuni tangențiale și prin urmare elementele de solidarizare sunt supuse la forfecare.

În domeniul construcțiilor metalice, în funcție de mărimea momentului încovoietor, se utilizează următoarele soluții pentru grinzi:

- 1) *profile laminate*, pentru momente încovoietoare relativ mici;
- 2) *grinzi compuse* din platbande și profile (îmbinate prin sudură sau cu șuruburi, etc.) pentru momente de valoare medie. În acest caz distrugerea grinzii poate să fie produsă și prin forfecarea solidarizărilor (șuruburi, cordoane de sudură, strat de adeziv, etc.). Calculul de rezistență care ține cont numai de tensiunile normale trebuie să fie completat, în cazul grinzilor cu secțiune compusă, cu un calcul care ține cont de tensiunile tangențiale. Prin urmare calculul grinzilor compuse cuprinde două etape:

- dimensionarea grinzii (cu formula lui Navier), astfel încât să reziste la momentul încovoietor maxim;
- determinarea tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii (cu formula lui Juravski), calculul forței de lunecare longitudinală și dimensionarea elementelor de solidarizare (solicitate la forfecare);

- 3) *grinzi cu zăbrele* pentru momente încovoietoare mari.

8.9. Grinzi de egală rezistență

În lungul unei grinzi drepte cu secțiune transversală constantă supusă la încovoiere simplă (*figura 8.17a*) tensiunile normale maxime (din fibrele cele mai depărtate de planul neutru) au valori diferite (*figura 8.17c*), deoarece momentul încovoiator variază de la o secțiune la alta (*figura 8.17b*). Tensiunea admisibilă se va atinge numai în secțiunea periculoasă, în celelalte secțiuni tensiunile normale fiind mult mai mici (*figura 8.17c*). Rezultă că, în cazul încovoierii simple, materialul grinzii de secțiune constantă nu este utilizat în mod judicios. Eliminarea acestui neajuns se poate face prin proiectarea unei grinzi cu secțiune variabilă, astfel realizată încât tensiunile normale în fibrele cele mai îndepărtate de planul neutru să fi egale în modul cu σ_a , în orice secțiune. Se obține astfel o *grindă de egală rezistență*. Grinzile de egală rezistență au volum minim și deformații maxime și pot fi construite în mai multe variante.

1. *Grindă în consolă, cu secțiune dreptunghiulară, de lățime constantă (figura 8.17d)*

Se admite pentru grindă o secțiune dreptunghiulară cu $b = \text{constant}$ și h variabil pe Ox . Diagrama $\sigma_x(x)$ este impusă ($\sigma_x(x) = \sigma_a$), iar diagrama de momente din *figura 8.17b* rămâne valabilă.

Înlocuind în formula lui Navier se obține:

$$\sigma_{\max} = \sigma_a = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = \frac{6Fx}{bh^2(x)}$$

(8.821)

de unde rezultă funcția:

$$h(x) = \sqrt{\frac{6Fx}{b\sigma_a}} \quad (8.88)$$

Prin urmare înălțimea grinzii de egală rezistență variază după o lege parabolică. La stabilirea acestei legi de variație nu s-a ținut cont de influența forței tăietoare. Pentru a nu se distruge grinda prin forfecare, în secțiunea în care

este aplicată forța concentrată (la capătul liber al grinzii), secțiunile se majorează (pentru a micșora tensiunile tangențiale). Modificarea este prezentată cu linie întreruptă în figura 8.17d.

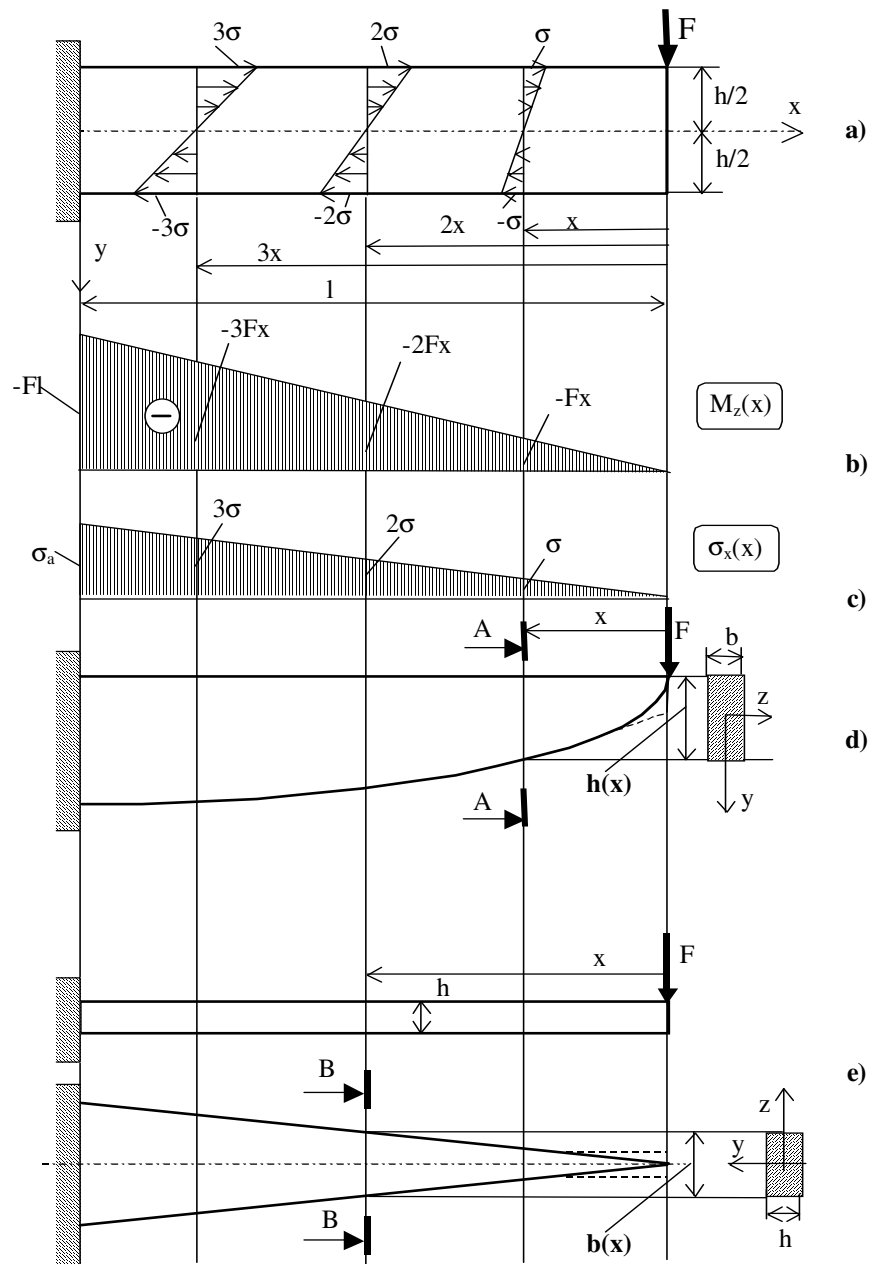


Figura 8.17

2. Grindă în consolă, cu secțiune dreptunghiulară de înălțime constantă

Grinda este prezentată în *figura 8.17e* (vedere frontală și de sus). Rămân valabile condiția $\sigma_x(x) = \sigma_a$ și diagrama de momente din *figura 8.17b*. Pentru secțiunea x formula lui Navier se poate scrie astfel:

$$\sigma_{\max} = \sigma_a = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = \frac{6Fx}{b(x)h^2} \quad (8.89)$$

de unde rezultă:

$$b(x) = \frac{6F}{\sigma_a h^2} x \quad (8.90)$$

Relația (8.90) indică faptul că variația lățimii secțiunii transversale de-a lungul grinzii este liniară. Valoarea maximă se obține pentru $x=l$. Ca și în cazul anterior, secțiunea grinzii se majorează în vecinătatea capătului liber, pentru limitarea tensiunilor tangențiale (modificarea este prezentată cu linie întreruptă în vederea de sus din *figura 8.17e*).

Grinda din *figura 8.17e* este dificil de realizat din punct de vedere tehnologic. Ea poate fi aproximată, printr-o variație în trepte, în cazul arcurilor cu foi, utilizate la suspensia vehiculelor, care se obține împărțind forma teoretică în fâșii de aceeași lățime (lățimea foi de arc) și suprapunerea acestora.

8.10. Calculul deplasărilor la încovoiere

8.10.1. Generalități

Studiul deplasărilor grinzilor solicitate la încovoiere prezintă importanță cel puțin din următoarele două considerente:

- pe lângă condiția de rezistență, organele de mașini și elementele de construcții trebuie să satisfacă și condiții de rigiditate (ceea ce implică o limitare a deplasărilor);
- problemele static nedeterminate nu pot fi abordate fără studiul deplasărilor.

Se reprezintă schematic grinda prin axa neutră și se raportează la sistemul de referință ortogonal xyz , cu axa Ox în lungul barei și axa Oy în jos. Într-o secțiune oarecare starea deformată a grinzii este caracterizată de următoarele mărimi geometrice (*figura 8.18*):

- **săgeata** care reprezintă deplasarea v , pe direcția axei Oy , a centrului de greutate a secțiunii transversale;
- **rotirea** care reprezintă înclinarea φ secțiunii transversale;
- deplasarea u pe direcția axei Ox ;
- raza de curbura ρ a fibrei medii deformate sau curbura $1/\rho$.

Deoarece între deplasările liniare există relația:

$$u \ll v \quad (8.91)$$

în cele ce urmează se neglijează deplasările u pe direcția axei Ox . Prin urmare prin calculul deplasărilor la încovoiere se înțelege calculul **săgeții** v și a **rotirii** φ într-o secțiune oarecare.

Se consideră grinzile din *figura 8.18*.

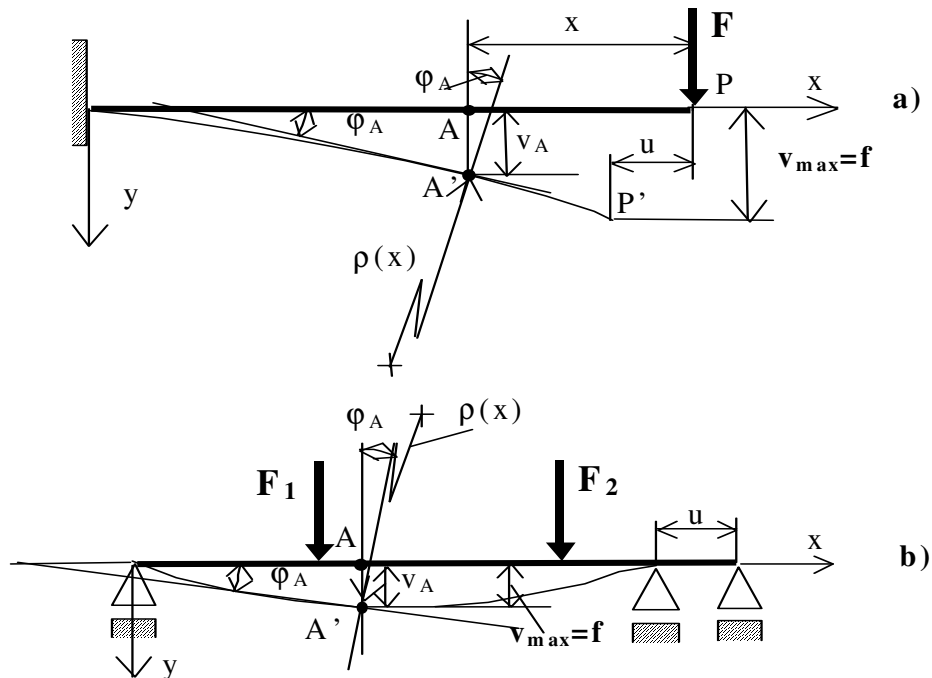


Figura 8.18

Sub acțiunea sarcinilor grinzile se deformează așa cum este indicat în figură. Punctul A , din secțiunea x , se deplasează în A' cu săgeata v_A . Săgeata maximă se notează $v_{max} = f$. Odată cu deplasarea pe verticală a punctului secțiunea transversală ce conține acest punct se rotește și formează cu poziția inițială unghiul φ_A . Același unghi se mai poate determina ducând tangenta geometrică la curba axei deformată în punctul A' . Pentru grinzi din materiale metalice deformațiile elastice sunt mici: $v \approx 1/1000 \div 1/250$ din deschiderea grinzii, iar $\varphi < 1^\circ$. În aceste condiții se poate scrie:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx} \approx \varphi \quad (8.92)$$

8.10.2. Ecuația diferențială a axei neutre deformată (Euler)

Pentru încovoierea în domeniul elastic, influența deplasărilor asupra poziției sarcinilor precum și deplasarea u pe direcția axei Ox pot fi neglijate.

Din relația (8.8) rezultă expresia curburii:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{M_z}{EI_z} \quad (8.93)$$

Semnul (-) a fost introdus datorită faptului că momentul încovoiător și curbura au semne diferite în sistemul de referință adoptat: curbura este pozitivă dacă concavitatea este îndreptată spre valorile pozitive ale axei ordonate.

Din geometria diferențială se cunoaște expresia curburii:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[\left(1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]} \quad (8.94)$$

În relația (8.94) s-a notat $y = v$. În cazul deformațiilor elastice mici, conform observațiilor la relația (8.92), se poate scrie:

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \ll 1 \quad (8.95)$$

Neglijând $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ în raport cu 1, *relația* (8.129) devine:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (8.96)$$

Din (8.93) și (8.96) rezultă:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \approx -\frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (8.97)$$

Relația (8.97) poartă numele de *ecuația diferențială a axei neutre deformată* sau *a fibrei medii deformată*, care a fost dedusă de către Euler. Prin integrarea relației se obțin expresiile săgeților și rotirilor.

8.10.3. Metode de calcul a deformațiilor la încovoiere

8.10.3.1. Metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a axei neutre deformată

Metoda analitică de integrare a ecuației diferențiale a axei neutre deformată se bazează pe *relația* (8.97) care poate fi scrisă sub forma:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x) \quad (8.98)$$

Integrând de două ori și ținând cont de *relația* (8.92) se obțin succesiv ecuația care dă rotirea în secțiunea x (care poate fi numită *ecuația rotirilor*):

$$EI_z \frac{dv}{dx} \approx EI_z \varphi(x) = -\int M_z(x) dx + C_1 \quad (8.99)$$

și *ecuația săgeților* în secțiunea x :

$$EI_z v(x) = -\int dx \int M_z(x) dx + C_1 x + C_2 \quad (8.100)$$

Constantele de integrare se determină din condiții de rezemare și de continuitate. Reazemele fiind admise perfect rigide, condițiile de rezemare sunt următoarele:

- într-o încastrare deplasările (săgeata și rotirea) sunt nule;
- într-un reazem simplu sau într-o articulație săgeata este nulă.

Condițiile de continuitate ale deplasărilor se pun în secțiunile de la granița dintre două regiuni ale grinzii. Astfel, pentru secțiunea i se poate scrie:

$$\varphi_i^{\text{st}} = \varphi_i^{\text{dr}} \quad \text{respectiv} \quad v_i^{\text{st}} = v_i^{\text{dr}} \quad (8.221)$$

Pentru fiecare astfel de secțiune pot fi puse deci două condiții de continuitate.

Din *relația (8.100)* se observă că, în urma integrării ecuației diferențiale, se obțin câte două constante de integrare pentru fiecare regiune a grinzii (deoarece funcția $M_z(x)$ este valabilă pentru o regiune). Astfel, pentru o grindă cu n regiuni, se vor obține $2n$ constante de integrare. Pentru aflarea acestora se pot pune **două** condiții de rezemare și $2(n-1)$ condiții de continuitate în cele $n-1$ secțiuni dintre regiuni. Rezultă un sistem compatibil, de $2n$ ecuații cu $2n$ necunoscute. Formarea și rezolvarea acestui sistem sunt extrem de laborioase. Prin urmare metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a axei neutre deformată este de obicei aplicată doar în cazul grinzilor cu o singură regiune. Pentru grinzile cu mai multe regiuni se pot aplica metode mai rapide pentru integrarea *ecuației (8.98)*, precum și alte metode de determinare a deformațiilor la încovoiere care vor fi prezentate în continuare.

Aplicație

Se consideră grinda în consolă din *figura 8.19*. Să se determine săgeata și rotirea maximă.

Într-o secțiunea x expresiile eforturilor sunt:

$$M_z(x) = -F \cdot x; \quad T_y(x) = F$$

iar diagramele $M_z(x)$ și $T_y(x)$ sunt reprezentate în *figura 8.19*.

Tensiunea normală maximă în modul se obține pentru $y_{\text{max}} = d/2$:

$$\sigma_x(x)_{\text{max}} = \frac{|-Fx| \frac{d}{2}}{I_z} = \frac{Fx}{W_z} \quad (8.102)$$

Această funcție are o variație liniară, la fel ca $M_z(x)$ și atinge valoarea maximă pentru $x = l$, adică în încastrare:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{Fl}{W_z} \quad (8.103)$$

Diagrama de variație a tensiunii normale este prezentată în figura 8.19.

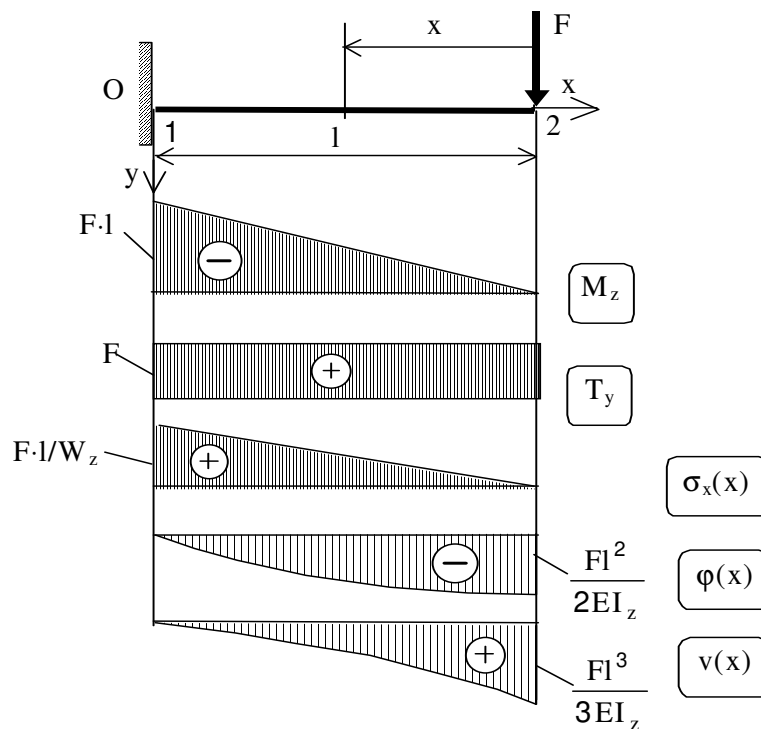


Figura 8.19

Pentru calculul deplasărilor se va folosi metoda analitică de integrare a ecuației diferențiale a axei neutre deformate. Ecuația diferențială (8.98) poate fi particularizată astfel:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = Fx \quad (8.104)$$

Integrând prima dată se obține ecuația rotirilor:

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \int Fx \, dx + C_1 = \frac{Fx^2}{2} + C_1$$

Ținând cont că $dv/dx \approx \varphi$, relația poate fi scrisă astfel:

$$EI_z \varphi(x) \approx \frac{Fx^2}{2} + C_1 \quad (8.105)$$

Integrând a doua oară rezultă ecuația săgeților:

$$EI_z v(x) = \int \frac{Fx^2}{2} dx + C_1 x + C_2 \Rightarrow EI_z v(x) = \frac{Fx^3}{6} + C_1 x + C_2 \quad (8.106)$$

Cele două constante de integrare pot fi determinate din condițiile de rezemare: în încastrare deplasările sunt nule:

$$\varphi(l) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{Fl^2}{2} + C_1 \right) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Fl^2}{2} \quad (8.107)$$

$$v(l) = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{Fl^3}{6} - \frac{Fl^2}{2} l + C_2 \right) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{Fl^3}{3} \quad (8.108)$$

Înlocuind valorile celor două constante în relațiile (8.105) și (8.106) rezultă ecuațiile rotirilor și săgeților:

$$\varphi(x) = \frac{F}{2EI_z} (x^2 - l^2) \quad (8.109)$$

$$v(x) = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{l^2}{2} x + \frac{l^3}{3} \right) \quad (8.110)$$

Funcțiile $\varphi(x)$ și $v(x)$ sunt prezentate grafic în figura 8.19. Deplasările maxime se obțin la capătul liber al grinzii și au valorile:

$$\varphi_2 = \varphi(0) = -\frac{Fl^2}{2EI_z}; \quad v_2 = v(0) = \frac{Fl^3}{3EI_z} \quad (8.111)$$

Din relațiile (8.105) și (8.106), pentru $x = 0$ se obține:

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{C_1}{EI_z}; \quad v(0) = v_0 = \frac{C_2}{EI_z} \quad (8.112)$$

Aceste relații permit să se dea un sens fizic constantelor de integrare:

C_1 / EI_z reprezintă rotirea, iar C_2 / EI_z săgeata, ambele calculate în originea secțiunii.

8.10.3.2. Metoda de integrare Clebsch

După cum s-a arătat mai sus, *metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a axei neutre* deformat prezintă dificultăți considerabile în cazul grinzilor cu mai multe regiuni. Aceste dificultăți constau în determinarea constantelor de integrare (câte două pentru fiecare regiune). *Metoda de integrare Clebsch*, care poate fi aplicată în cazul sarcinilor polinomiale, aduce mari simplificări în calculul constantelor de integrare. Prin aplicarea acestei metode se obțin practic cel mult două constante de integrare, indiferent de numărul regiunilor grinzii. Este însă necesar să se respecte cu rigurozitate anumite condiții care vor fi enunțate în cele ce urmează.

Fie o grindă cu n regiuni (*figura 8.20*). Se va presupune $EI_z = \text{const.}$ pe toată lungimea grinzii.

Se alege un sistem de axe cu originea într-un capăt al grinzii. Toate cotele se dau în funcție de origine (*figura 8.20*). *Toate secțiunile au originea în O .*

Aplicând metoda de integrare a axei neutre deformat, se obțin **$2n$** constante de integrare (câte două pentru fiecare regiune a grinzii):

$$C_{0-1}, \dots, C_{n-1,n}; D_{0-1}, \dots, D_{n-1,n} \quad (8.113)$$

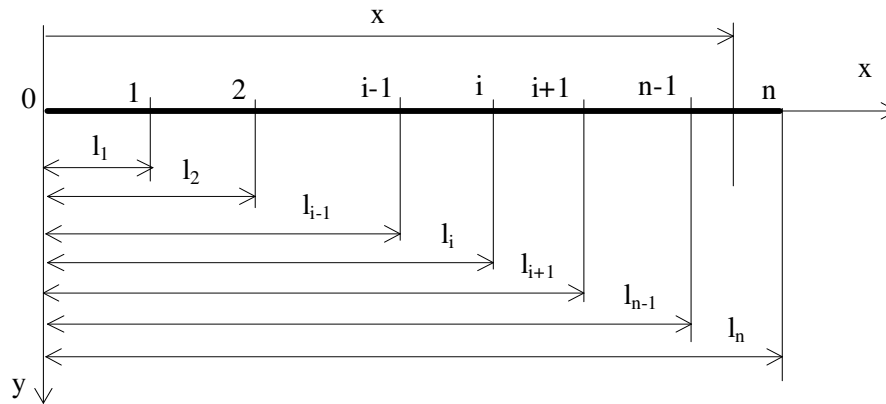


Figura 8.20

Se admite ipoteza că în orice regiune a grinzii se poate scrie:

$$M_{i,i+1} = M_{i-1,i} + k_i (x - l_i)^{n_i} \quad (8.114)$$

unde: $M_{i-1,i}$ – momentul încovoietor în regiunea $i-1,i$;

$M_{i,i+1}$ - momentul încovoietor în regiunea $i,i+1$;

k_i și n_i - constante.

Pentru integrare se folosește următoarea convenție:

$$\int (x - l_i)^{n_i} dx = \frac{(x - l_i)^{n_i+1}}{n_i + 1} + C \quad (8.115)$$

unde C - constantă de integrare.

Pentru regiunile consecutive $i-1,i$ și $i,i+1$ se scriu ecuațiile rotirilor și săgeților. Astfel, pentru regiunea $i-1,i$:

- ecuația axei neutre deformată este:

$$EI_z \frac{d^2 v_{i-1,i}}{dx^2} = -M_{i-1,i} \quad (8.116)$$

- ecuația rotirilor:

$$EI_z \phi_{i-1,i} = -\int M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i} \quad (8.117)$$

- ecuația săgeților:

$$EI_z v_{i-1,i} = -\int dx \int M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i} x + D_{i-1,i} \quad (8.118)$$

Pentru regiunea $i,i+1$:

- ecuația axei neutre deformată este:

$$EI_z \frac{d^2 v_{i,i+1}}{dx^2} = -M_{i,i+1} = -M_{i-1,i} - k_i (x - l_i)^{n_i} \quad (8.119)$$

- ecuația rotirilor:

$$EI_z \phi_{i,i+1} = \int M_{i-1,i} dx - k_i \frac{(x - l_i)^{n_i+1}}{n_i + 1} + C_{i,i+1} \quad (8.120)$$

- ecuația săgeților:

$$EI_z v_{i,i+1} = -\int dx \int M_{i-1,i} dx - k_i \frac{(x - l_i)^{n_i+2}}{(n_i + 1)(n_i + 2)} + C_{i,i+1} x + D_{i,i+1} \quad (8.121)$$

Pentru determinarea celor $2n$ constante de integrare se pun condițiile de continuitate (8.101). În secțiunea i , se poate scrie:

$$\begin{aligned}
&\text{pentru } x = l_i \\
&\varphi_{i-1,i}(l_i) = \varphi_{i,i+1}(l_i) \quad \text{respectiv} \\
&v_{i-1,i}(l_i) = v_{i,i+1}(l_i)
\end{aligned} \tag{8.122}$$

Înlocuind ecuațiile rotirilor și a săgeților (*relațiile 8.117, 8.118, 8.120, 8.121*) în *relațiile (8.122)*, se obține:

$$-\int_0^{l_i} M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i} = -\int_0^{l_i} M_{i,i+1} dx + C_{i,i+1} \tag{8.123}$$

$$-\int_0^{l_i} dx \int M_{i-1,i} dx + C_{i-1,i} l_i + D_{i-1,i} = -\int_0^{l_i} dx \int M_{i,i+1} dx + C_{i,i+1} l_i + D_{i,i+1} \tag{8.124}$$

Din (8.123) și (8.124) rezultă:

$$C_{i-1,i} = C_{i,i+1} = C; \quad D_{i-1,i} = D_{i,i+1} = D \tag{8.125}$$

Deci toate constantele **C** și respectiv **D** sunt egale între ele. Astfel numărul de constante se reduce la două. La fel ca și la metoda de integrare analitică a ecuației diferențiale a axei neutre, cele două constante împărțite la EI_z reprezintă rotirea și respectiv săgeata în originea aleasă:

$$\varphi_{0-1}(0) = \varphi_0 = \frac{C}{EI_z}; \quad v_{0-1}(0) = v_0 = \frac{D}{EI_z} \tag{8.126}$$

Pentru determinarea celor două constante **C** și **D** se pun condițiile de rezemare:

- în încastrare $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (dacă originea sistemului este aleasă într-o încastrare, ambele constante sunt nule $\mathbf{C=D=0}$);

- în reazemul simplu și în articulație $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ (constanta $\mathbf{D} = \mathbf{0}$).

Respectarea condiției exprimată prin *relația (8.114)* este esențială pentru reușita aplicării acestei metodei. Această condiție este uneori dificil de îndeplinit și se fac unele artificii pentru formarea binoamelor ($x-l_i$).

Relația (8.114) indică faptul că din expresia momentului $M_{n-1,n}$ scris pentru ultima regiune ($n-1,n$), se pot obține expresiile momentelor încovoietoare din toate celelalte regiuni, dacă se reține numărul corespunzător de termeni. În aceste condiții la aplicarea *metodei de integrare Clebsch* este suficient să se scrie

momentul încovoietor numai în secțiunea x , făcută prin ultima regiune a grinzii (figura 8.20).

Aplicație

Se va aplica metoda de integrare Clebsch pentru calculul deplasărilor grinzii din figura 8.21a.

Expresiile momentelor încovoietoare pe fiecare regiune a grinzii sunt:

$$\begin{aligned} x \in [0, l_1] \quad M_z(x) &= V_1 \cdot x \\ x \in [l_1, l_2] \quad M_z(x) &= V_1 \cdot x - F(x - l_1) \\ x \in [l_2, l_3] \quad M_z(x) &= V_1 \cdot x - F(x - l_1) + M(x - l_2)^0 \end{aligned} \quad (8.127)$$

Pentru a aplica procedeul Clebsch se parcurg următoarele etape:

1) se alege originea sistemului în capătul din stânga a grinzii și se face secțiunea x prin ultima regiune a grinzii.

Se scrie momentul încovoietor în secțiunea x , respectând condiția din relația (8.114). Pentru a putea forma binoame de forma $(x-l_i)$ momentele concentrate vor fi înmulțite cu binomul la puterea zero. În cazul sarcinilor distribuite, binoamele nu pot fi formate decât dacă sarcina acționează până în secțiune. În caz contrar, ea poate fi prelungită până în secțiune, adăugând și scăzând-o pe aceeași porțiune de grindă (figura 8.21b). Se obține:

$$M_z(x) = V_1 x \Big|_{0-1} - F(x - l_1) \Big|_{1-2} + M(x - l_2)^0 \Big|_{2-3} - \frac{q(x - l_3)^2}{2} \Big|_{3-4} + \frac{q(x - l_4)^2}{2} \Big|_{4-5} \quad (8.128)$$

Momentul încovoietor astfel scris conține practic momentele încovoietoare din toate regiunile anterioare (vezi relațiile 8.127). Toți termenii din expresia (8.128) conțin binomul $x-l_i$, unde l_i este lungimea regiunilor anterioare.

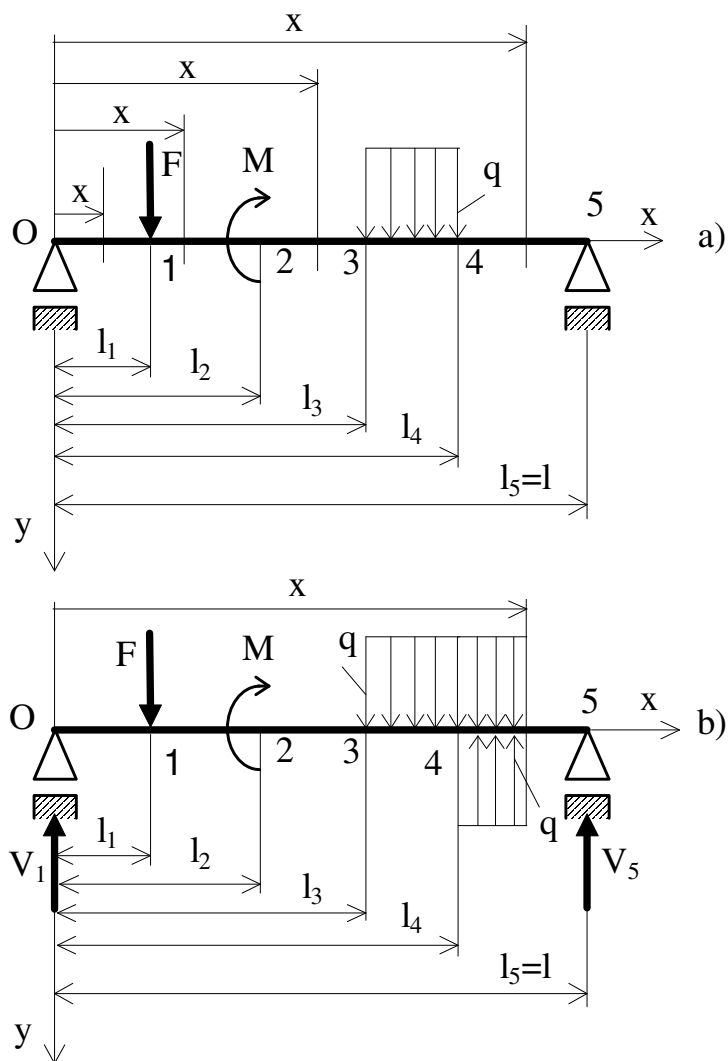


Figura 8.21

2) se scrie ecuația diferențială a axei deformat:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -V_1 x + F(x - l_1) - M(x - l_2)^0 + \frac{q(x - l_3)^2}{2} - \frac{q(l - x_4)^2}{2} \quad (8.129)$$

3) se integrează ecuația diferențială

Integrând prima dată și respectând condiția (8.115), se obține ecuația rotirilor:

$$EI_z \varphi(x) = -V_1 \frac{x^2}{2} + F \frac{(x-l_1)^2}{2} - M(x-l_2) + \frac{q(x-l_3)^3}{6} - \frac{q(l-x_4)^3}{6} + C \quad (8.130)$$

Integrând a doua oară, se obține *ecuația săgeților*:

$$EI_z v(x) = -V_1 \frac{x^3}{6} + F \frac{(x-l_1)^3}{6} - M \frac{(x-l_2)^2}{2} + \frac{q(x-l_3)^4}{24} - \frac{q(l-x_4)^4}{24} + Cx + D \quad (8.131)$$

4) se determină constantele de integrare

Constantele de integrare se determină din condițiile de rezemare (săgețile sunt nule în reazemele 0 și 5, presupuse perfect rigide).

Pentru a determina săgeata în reazemul 0, din ecuația săgeților (8.131) se scrie expresia săgeții în prima regiune (pentru $x \in [0, l_1]$) și apoi se pune condiția $x = 0$. Se obține:

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left(-V_1 \frac{x^3}{6} + Cx + D \right) \quad (8.132)$$

$$\text{pentru } x = 0: v(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

Se observă că, pentru a scrie expresia săgeții pentru o regiune se rețin numai termenii caracteristici acelei regiuni, precum și cele două constante de integrare. Pentru a recunoaște mai ușor termenii caracteristici unei regiuni, se poate ține cont de observația că *termenii care conțin binoamele $x-l_i < 0$ nu sunt caracteristici regiunii respective și în consecință vor fi îndepărtați din ecuația săgeților*. Constanta **D** putea fi determinată și direct, ținând cont de *relația* (8.126).

Săgeata în reazemul 5 este nulă și se obține din *relația* (8.131) în care se înlocuiește $x = l$ și $D = 0$:

$$0 = \frac{1}{EI_z} \left(-V_1 \frac{l^3}{6} + \frac{F(l-l_1)^3}{6} - \frac{M(l-l_2)^2}{2} + q \frac{(l-l_3)^4}{24} - q \frac{(l-l_4)^4}{24} + Cl \right) \quad (8.133)$$

Din ecuația (8.133) se determină **C**.

5) determinarea deplasărilor

Constantele C și D astfel determinate sunt introduse în ecuațiile (8.130) și (8.131). Din aceste ecuații se poate determina rotirea și respectiv săgeata în orice secțiune a grinzii, dacă se dă valori lui x și se rețin termenii corespunzători regiunii respective (numai acei termeni care conțin binoamele $x-l_i > 0$).

Observații:

1. Aplicarea metodei de integrare Clebsch este avantajoasă atunci când grinda are un număr mare de regiuni.

2. Metoda nu poate fi aplicată decât la sarcini distribuite care dau momente încovoietoare exprimate prin funcții polinomiale (sarcini uniform sau liniar distribuite, etc.). Însă odată cu creșterea gradului funcției crește și dificultatea formării binoamelor $x-l_i$.

Aplicație

Să se determine săgeata și rotirea în secțiunea A, la grinda din figura 8.22, utilizând metoda Clebsch.

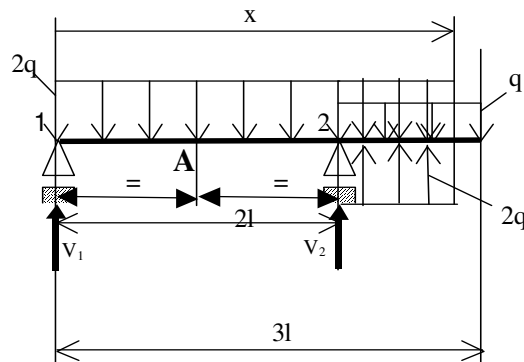


Figura 8.22

Se scrie momentul încovoietor în ultima regiune de pe grindă respectând condiția din relația (8.114):

$$M_z(x) = V_1x - 2q \frac{x^2}{2} + V_2(x - 2l) - q \frac{(x - 2l)^2}{2} + 2q \frac{(x - 3l)^2}{2} \quad (8.134)$$

Se scrie ecuația axei neutre deformată și se integrează de două ori, respectând *relația* (8.115). Se obține:

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -V_1x + 2q \frac{x^2}{2} - V_2(x - 2l) + q \frac{(x - 2l)^2}{2} - 2q \frac{(x - 2l)^2}{2} \quad (8.135)$$

$$EI_z \varphi(x) = -V_1 \frac{x^2}{2} + 2q \frac{x^3}{6} - V_2 \frac{(x - 2l)^2}{2} + q \frac{(x - 2l)^3}{6} - 2q \frac{(x - 2l)^3}{6} + C \quad (8.136)$$

$$EI_z v(x) = -V_1 \frac{x^3}{6} + 2q \frac{x^4}{24} - V_2 \frac{(x - 2l)^3}{6} + q \frac{(x - 2l)^4}{24} - 2q \frac{(x - 2l)^4}{24} + Cx + D \quad (8.137)$$

Se determină constantele de integrare din condiția de rezemare. Deoarece săgeata în reazemul **1** este nulă, ținând cont și de relația (8.126) se poate scrie:

$$v_1 = \frac{D}{EI_z} = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (8.138)$$

În relația (8.137) luând $x = 2l$ și reținând numărul corespunzător de termeni se obține expresia săgeții în reazemul **2**, care este de asemenea nulă:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{V_1}{6} (2l)^3 + \frac{2q}{24} (2l)^4 + C2l \right) = 0 \quad (8.139)$$

Din ecuația (8.139) se determină constanta C .

Înlocuind constantele C și D astfel calculate în ecuațiile rotirilor (8.136) și săgeților (8.137), se pot determina rotirile și săgețile în orice secțiune a grinzii, dacă se dau valorile corespunzătoare lui x și se rețin numărul corespunzător de termeni.

Astfel, pentru a determina rotirea și săgeata în A , se rețin, din *relațiile* (8.136) și (8.137), doar termenii corespunzători încărcărilor din origine până în punctul în care se face particularizarea, se introduc valorile C și D și se face $x=l$. Se obține:

$$\varphi_A = \varphi(l) = \frac{1}{EI_z} \left(-V_1 \frac{l^2}{2} + \frac{ql^3}{3} + C \right) \quad (8.140)$$

$$v_A = v(l) = \frac{1}{EI_z} \left(-V_1 \frac{l^3}{6} + \frac{ql^4}{12} + Cl \right) \quad (8.141)$$

8.10.3.3 Calculul deplasărilor prin metode energetice

Calculul deplasărilor într-o secțiune

Teoremele lui Castigliano și metoda Maxwell - Mohr (pentru calculul derivatelor parțiale) pot fi utilizate cu ușurință pentru calculul deplasărilor într-o secțiune, așa cum s-a arătat în *Capitolul 4*. Utilizând teoremele lui Castigliano (și eventual metoda Maxwell-Mohr pentru calculul derivatelor parțiale) se calculează *numai deplasările într-o anumită secțiune a grinzii*. Acesta reprezintă un dezavantaj al metodei, comparativ cu integrarea ecuației diferențiale a axei neutre deformată (prin metoda Euler sau Clebsch), care dă deplasările într-o regiune sau chiar în toate regiunile grinzii.

La încovoierea grinzilor lungi și masive se neglijează de obicei aportul forțelor tăietoare la energia potențială de deformare. Astfel, se va admite expresia (8.46) pentru energia potențială de deformare.

Aplicație:

Pentru exemplificare se va relua grinda în consolă de la aplicația făcută la metoda analitică de integrare a ecuației diferențiale a axei neutre deformată (*figura 8.19*). Așa cum s-a precizat momentul încovoietor în grinda reală este:

$$M_z(x) = -F \cdot x$$

Grinda se încarcă succesiv, în secțiunea în care dorim să calculăm săgeata și rotirea, *numai* cu o *forță unitară* și apoi *numai* cu un *moment unitar* (*figura 8.23*) și se scriu momentele fictive care vor fi utilizate la calculul săgeții și rotirii:

$$m_{v2}(x) = -1 \cdot x = -x; \quad m_{\varphi2}(x) = -1 \quad (8.142)$$

Săgeata și rotirea pe capătul liber al grinzii se determină cu relațiile:

$$v_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M_z(x) m_{v2}(x) dx \quad (8.143)$$

$$v_2 = f = \frac{1}{EI_z} \int_0^l (-Fx)(-x)dx = \frac{Fl^3}{3EI_z} \quad (8.144)$$

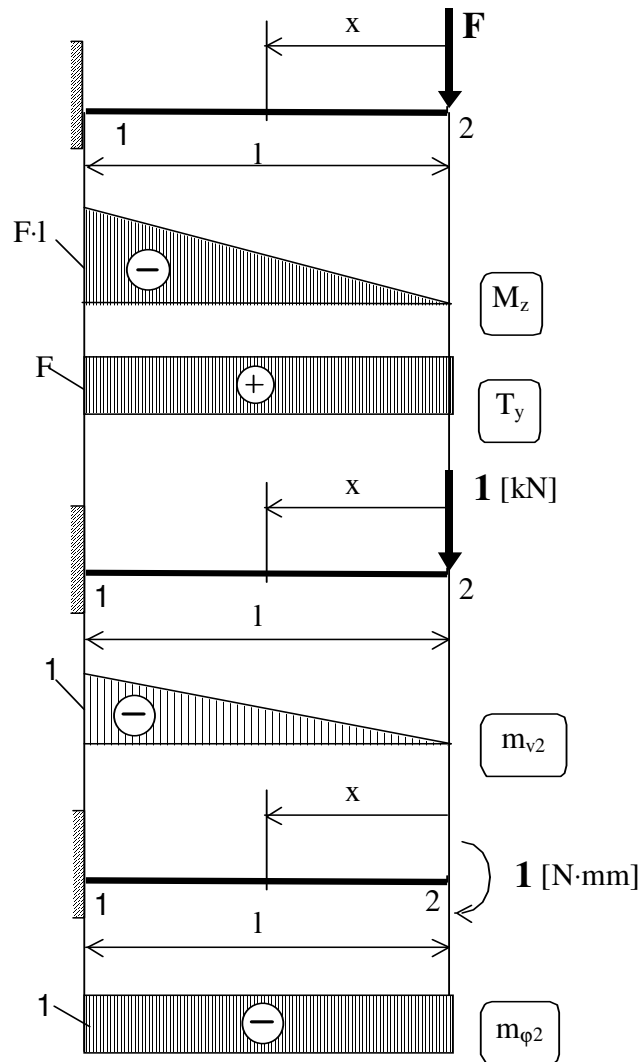


Figura 8.23

respectiv

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^l M_z(x) m_{\varphi_2}(x) dx \quad (8.145)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{EI_z} \int_0^l (-Fx)(-1)dx = \frac{Fl^2}{2EI_z} \quad (8.146)$$

S-au obținut aceleași expresii ale deplasărilor ca în relația (8.111), obținută prin integrare analitică a ecuației diferențiale a axei neutre deformate. Faptul că v_2 și φ_2 sunt pozitive semnifică faptul că deplasarea liniară (săgeată) are loc în sensul forței unitare, iar rotirea secțiunii în sensul momentului unitar. Sensul sarcinilor unitare este ales arbitrar.

Calculul deplasărilor într-o regiune

Se va prezenta modul în care se poate face studiul deplasărilor *într-o regiune* a unei grinzii solicitate la încovoiere prin metode energetice (teoremele Castigliano asociate cu metoda Maxwell-Mohr).

Fie grinda din *figura 8.24*. Deplasările acestei grinzi au fost studiate la metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a axei neutre deformate (*figura 8.19*).

Momentul încovoiător în secțiunea x , pentru grinda cu încărcare reală (*figura 8.24a*) este:

$$M_z(x) = -Fx$$

Pentru studiul deplasărilor *într-o regiune* a grinzii, prin metode energetice, sarcinile unitare fictive vor fi aplicate în secțiunea x . Astfel, pentru determinarea derivatelor parțiale prin metoda Maxwell-Mohr, în secțiunea x a grinzii (fără încărcarea reală) se adaugă o forță unitară fictivă (*figura 8.24c*) și respectiv un moment unitar fictiv (*figura 8.24e*). Grinzile încărcate cu sarcină unitară au două regiuni, prin care se fac secțiunile x_1 și respectiv x_2 . Toate secțiunile (x, x_1, x_2) au aceeași origine (în capătul liber al grinzii).

Pentru grinda din *figura 8.24c* momentele sunt (indicele v arată că aceste momente sunt utilizate pentru calculul săgeții):

$$x_1 \in [0, x] \quad m_v(x_1) = 0 \quad (8.147)$$

$$x_2 \in [x, l] \quad m_v(x_2) = -1 \cdot (x_2 - x) \quad (8.148)$$

Funcțiile m_v sunt prezentate în diagrama din *figura 8.24d*.

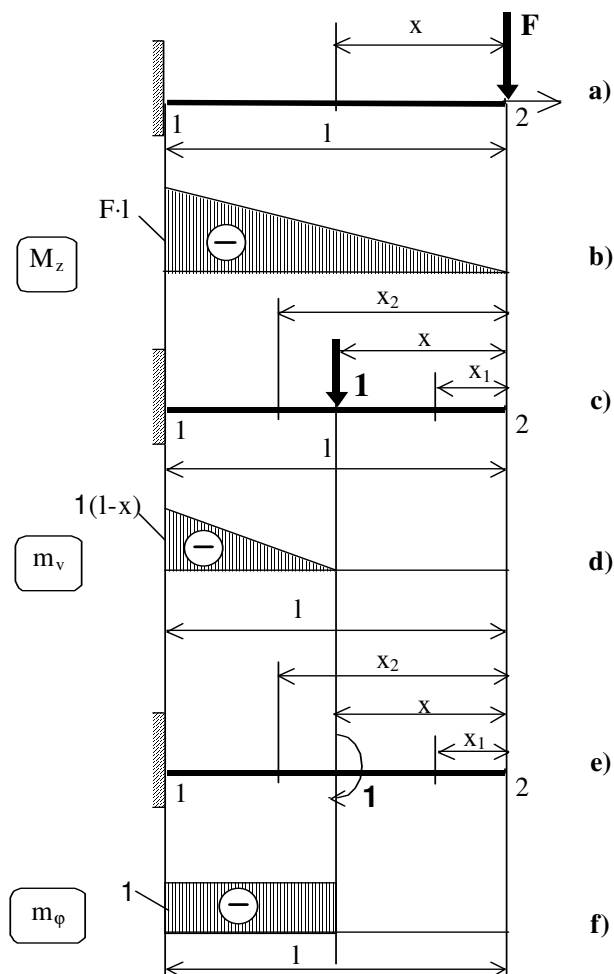


Figura 8.24

Pentru grinda din *figura 8.24e* se scriu momentele:

$$x_1 \in [0, x] \quad m_\varphi(x_1) = 0 \quad (8.149)$$

$$x_2 \in [x, l] \quad m_\varphi(x_2) = -1 \quad (8.150)$$

Indicele φ arată că aceste momente sunt utilizate pentru calculul rotirii.

În secțiunea x săgeata și rotirea pot fi scrise succesiv astfel:

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^x M_z(x_1) m_v(x_1) dx_1 + \int_x^l M_z(x_2) m_v(x_2) dx_2 \right] \quad (8.151)$$

$$v(x) = \frac{1}{EI_z} \int_x^l (-Fx_2) [-1(x_2 - x)] dx_2 = \frac{F}{EI_z} \int_x^l (x_2^2 - xx_2) dx_2 \quad (8.152)$$

$$v(x) = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_2^2}{2} x \right) \Big|_x^1 = \frac{F}{EI_z} \left[\frac{1}{3}(l^3 - x^3) - \frac{x}{2}(l^2 - x^2) \right] =$$

$$= \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2}x + \frac{l^3}{3} \right) \quad (8.153)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^x M_z(x_1) m(x_1) dx_1 + \int_x^l M_z(x_2) m(x_2) dx_2 \right] \quad (8.154)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_z} \int_x^l (-Fx_2)(-1) dx_2 = \frac{F}{EI_z} \int_x^l x_2 dx_2 \quad (8.155)$$

$$\varphi(x) = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x_2^2}{2} \right) \Big|_x^l = \frac{F}{2EI_z} (l^2 - x^2) \quad (8.156)$$

S-au obținut astfel aceleași expresii ale săgeții și rotirii, ca cele determinate prin metoda integrării analitice a ecuației diferențiale a axei neutre deformată date de *relațiile* (8.109) și (8.110).

Metoda prezentată mai sus va fi extinsă la o grindă cu n regiuni (*figura* 8.25a), încărcată cu sarcini oarecare. Ea permite determinarea săgeții și rotirii în secțiunea curentă a unei regiuni oarecare a grinzii.

Se pune problema de a se determina săgeata și rotirea în secțiunea t , din regiunea $(j-1, j)$. Se alege în capătul din stânga al grinzii originea pentru toate cotele și toate secțiunile. Sarcinile unitare fictive, introduse în secțiunea t (*figura* 8.25b,c), împart grinda în două regiuni: cea din stânga sarcinii (notată cu S) și cea din dreapta sarcinii (notată cu D). Pentru simplificare, momentul încovoietor din regiunea $(i-1, i)$ va fi notat $M_{i-1,i} = M_{(i)}$.

Se notează cu $\Delta(t)$ *deplasarea generalizată* în secțiunea t , prin aceasta înțelegând fie *săgeata* $v(t)$, fie *rotirea* $\varphi(t)$.

Pentru grinda cu încărcarea fictivă din *figura* 8.25b, momentele în regiunea din *stânga* și respectiv din *dreapta* forței unitare sunt:

$$\begin{aligned}
 x \in [0, t] \quad m_S &= \frac{L-t}{L} x, \\
 x \in [t, L] \quad m_D &= \frac{L-t}{L} x - l(x-t) = \frac{L-x}{L} t
 \end{aligned}
 \tag{8.157}$$

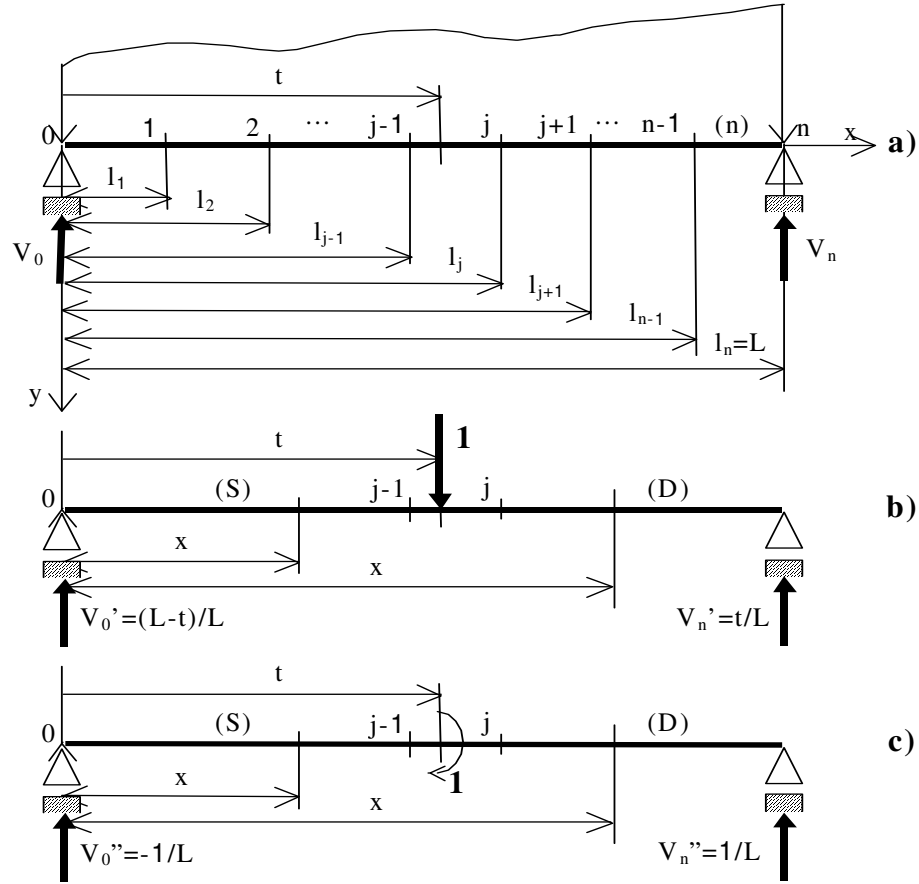


Figura 8.25

de unde rezultă:

$$m_S - m_D = x - t \tag{8.158}$$

Pentru grinda din *figura 8.25c*, momentele din regiunea din *stânga* și respectiv din *dreapta* momentului unitar fictiv se pot scrie astfel:

$$\begin{aligned}
 x \in [0, t] \quad m_S &= -\frac{x}{L} \\
 x \in [t, L] \quad m_D &= -\frac{x}{L} + 1 = \frac{L-x}{L},
 \end{aligned}
 \tag{8.159}$$

rezultă:

$$m_S - m_D = -1 \quad (8.160)$$

Deplasarea în secțiunea considerată se poate exprima astfel:

$$\begin{aligned} \Delta(t) = \frac{1}{EI_z} [& \int_0^{l_1} M_{(1)} m_S dx + \int_{l_1}^{l_2} M_{(2)} m_S dx + \dots \\ & \dots + \int_{l_{j-1}}^t M_{(j)} m_S dx + \int_t^{l_j} M_{(j)} m_D dx + \dots + \int_{l_{n-1}}^{l_n} M_{(n)} m_D dx] \end{aligned} \quad (8.161)$$

Se descompun integralele, astfel încât toate să aibă limita inferioară zero:

$$\begin{aligned} \Delta(t) = \frac{1}{EI_z} [& \int_0^{l_1} M_{(1)} m_S dx + \int_0^{l_2} M_{(2)} m_S dx - \int_0^{l_1} M_{(2)} m_S dx + \dots \\ & \dots + \int_0^t M_{(j)} m_S dx - \int_0^{l_{j-1}} M_{(j)} m_S dx + \int_0^{l_j} M_{(j)} m_D dx - \int_0^t M_{(j)} m_D dx + \dots \\ & \dots + \int_0^{l_n} M_{(n)} m_D dx - \int_0^{l_{n-1}} M_{(n)} m_D dx] \end{aligned} \quad (8.162)$$

Se grupează integralele cu aceleași limite de integrare și se obține:

$$\begin{aligned} \Delta(t) = \frac{1}{EI_z} [& \int_0^{l_1} (M_{(1)} - M_{(2)}) m_S dx + \int_0^{l_2} (M_{(2)} - M_{(3)}) m_S dx + \dots \\ & \dots + \int_0^{l_{j-1}} (M_{(j-1)} - M_{(j)}) m_S dx + \int_0^{l_j} (M_{(j)} - M_{(j+1)}) m_D dx + \int_0^{l_{j+1}} (M_{(j+1)} - M_{(j+2)}) m_D dx + \dots \\ & \dots + \int_0^{l_n} (M_{(n-1)} - M_{(n)}) m_D dx + \int_0^t M_{(j)} (m_S - m_D) dx] \end{aligned}$$

În forma restrânsă relația poate fi scrisă astfel:

$$\begin{aligned} \Delta(t) = \frac{1}{EI_z} \{ & \sum_{i=1}^{j-1} \int_0^{l_i} [M_{(i)} - M_{(i+1)}] m_S dx + \sum_{i=j}^n \int_0^{l_i} [M_{(i)} - M_{(i+1)}] m_D dx + \\ & + \int_0^t M_{(j)} (m_S - m_D) dx \} \end{aligned} \quad (8.163)$$

Dacă în relația (8.163), $\Delta(t)$ reprezintă săgeata $v(t)$, atunci m_S și m_D vor fi date de relația (8.157), iar diferența $m_S - m_D$ de (8.158). Dacă însă $\Delta(t)$ reprezintă

rotirea $\varphi(t)$, atunci m_S și m_D vor fi date de relația (8.159), iar diferența lor de (8.160).

Avantajul metodei prezentate este acela că poate fi utilizată și atunci când metoda Clebsch este dificil de aplicat sau chiar nu poate fi aplicată: pentru grinzi drepte cu sarcini distribuite după alte legi decât polinomiale, pentru grinzi cotate, pentru bare curbe.

8.11. Grinzi static nedeterminate

La această categorie de grinzi, numărul reacțiunilor este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru. La fel cum s-a procedat și la alte solicitări, ecuațiile de echilibru vor fi completate cu ecuații de deplasări, formându-se un sistem compatibil prin rezolvarea căruia se determină valorile reacțiunilor. În principiu, orice metodă care permite calculul deplasărilor poate fi utilizată și la ridicarea nedeterminării. După ridicarea nedeterminării (aflarea reacțiunilor) grinzile se rezolvă la fel ca cele static determinate (dimensionare, calculul deplasărilor).

8.11.1. Ridicarea nedeterminării prin metoda Clebsch

Să se calculeze reacțiunile la grinda din figura 8.26a utilizând metoda Clebsch de integrare a ecuației diferențiale a axei neutre deformate.

Pentru ridicarea nedeterminării se vor parcurge următoarele etape:

- scrierea ecuațiilor staticii

Se figurează reacțiunile, se scriu ecuațiile de echilibru și se stabilește gradul de nedeterminare:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 - 2ql + V_2 + V_3 = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow V_3 3l + V_2 2l - q2l^2 = 0\end{aligned}\tag{8.164}$$

Rezultă **NR = 3** (numărul reacțiunilor) și **NE = 2** (numărul ecuațiilor), prin urmare gradul de nedeterminare este **GN = NR - NE = 1** (problema este simplu

static nedeterminată). Mai este nevoie de o singură ecuație (care rezultă din studiul deplasărilor) care adăugată la cele două din *relația (8.164)* formează sistemul compatibil prin rezolvarea căruia se determina valorile reacțiunilor.

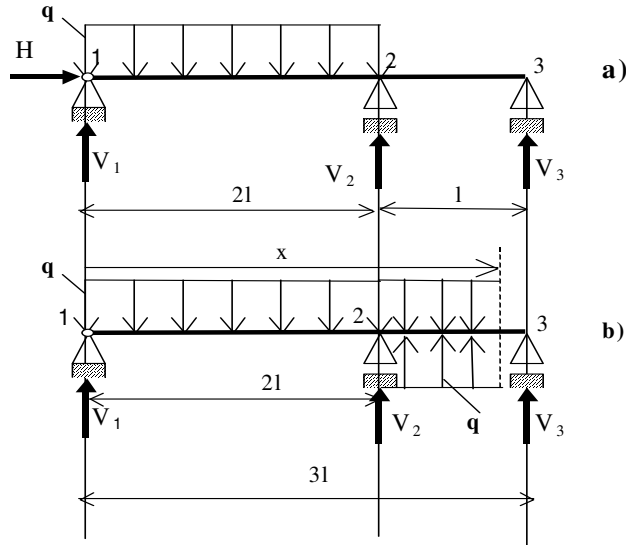


Figura 8.26

- ridicarea nedeterminării

Se scrie momentul $M_z(x)$ în ultima regiune (vezi *figura 8.26b*), respectând condiția impusă la procedeul Clebsch. Se obține:

$$M_z(x) = V_1 x - q \frac{x^2}{2} + V_2 (x - 2l) + q \frac{(x - 2l)^2}{2} \quad (8.165)$$

Se scrie ecuația diferențială a axei neutre deformate și se integrează de două ori. Rezultă:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -V_1 x + q \frac{x^2}{2} - V_2 (x - 2l) - \frac{q(x - 2l)^2}{2} \quad (8.166)$$

$$EI_z \varphi(x) \approx EI_z \frac{dv}{dx} = -V_1 \frac{x^2}{2} + q \frac{x^3}{6} - V_2 \frac{(x - 2l)^2}{2} - \frac{q(x - 2l)^3}{6} + C \quad (8.167)$$

$$EI_z v(x) = -V_1 \frac{x^3}{6} + q \frac{x^4}{24} - V_2 \frac{(x-2l)^3}{6} - \frac{q(x-2l)^4}{24} + Cx + D \quad (8.168)$$

Cele două constante de integrare se determină din condițiile de rezemare. Reazemele fiind presupuse rigide săgeata în cele trei reazeme va fi nulă, adică:

$$v(0) = v_1 = 0; \quad v(2l) = v_2 = 0; \quad v(3l) = v_3 = 0 \quad (8.169)$$

Două dintre condițiile de rezemare vor fi utilizate pentru calculul constantelor de integrare, iar a treia, după înlocuirea constantelor, va forma un sistem compatibil împreună cu ecuațiile (8.164). Se obține:

$$v(0) = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{V_1}{6} 0 + C 0 + D \right) = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (8.170)$$

$$v(2l) = \frac{1}{EI_z} \left[-V_1 \frac{(2l)^3}{6} + q \frac{(2l)^4}{24} + C 2l \right] = 0 \Rightarrow C = \frac{l^2}{6} (4V_1 + ql) \quad (8.171)$$

$$v(3l) = \frac{1}{EI_z} \left[-\frac{V_1}{6} (3l)^3 + \frac{q}{24} (3l)^4 - \frac{V_2}{6} (3l-2l)^3 - q \frac{(3l-2l)^4}{24} + \frac{l^2}{6} (4V_1 + ql) 3l \right] = 0$$

Din ultima relație rezultă:

$$-\frac{5}{2} l^3 V_1 - \frac{1}{6} V_2 - \frac{1}{6} ql^4 = 0 \Leftrightarrow 15V_1 + V_2 + ql = 0 \quad (8.172)$$

Din relația (8.172) și ecuațiile (8.164) rezultă sistemul prin rezolvarea căruia se obțin valorile celor trei reacțiuni, deci se ridică nedeterminarea grinzii. Astfel pentru grinda din figura 8.26a se obține:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 - 2ql &= 0 \\ 2V_2 + 3V_3 - 4ql &= 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2} ql; \quad V_2 = \frac{1}{2} ql; \quad V_3 = ql \\ 15V_1 + V_3 + ql &= 0 \end{aligned} \quad (8.173)$$

Aplicarea acestei metode este mai laborioasă dar este avantajoasă dacă se cer deplasările în multe secțiuni sau ecuațiile axei neutre deformată pe regiuni.

După ridicarea nedeterminării (aflarea reacțiunilor) grinzile se rezolvă la fel ca cele static determinate (calculul de rezistență, calculul deplasărilor).

8.11.2. Ridicarea nedeterminării prin metoda eforturilor

1) Se va aplica metoda eforturilor tot pentru grinda din figura 8.26a.

Pentru ridicarea nedeterminării se vor parcurge următoarele etape:

- scrierea ecuațiilor statice

Această etapă a fost parcursă la exemplul anterior.

- fixarea necunoscutei static nedeterminate și stabilirea sistemului de bază

Gradul de nedeterminare fiind $GN = 1$, se va stabili o singură necunoscută static nedeterminată X_I și se va scrie o singură ecuație:

$$\delta_{11}X_I + \delta_{10} = 0 \quad (8.174)$$

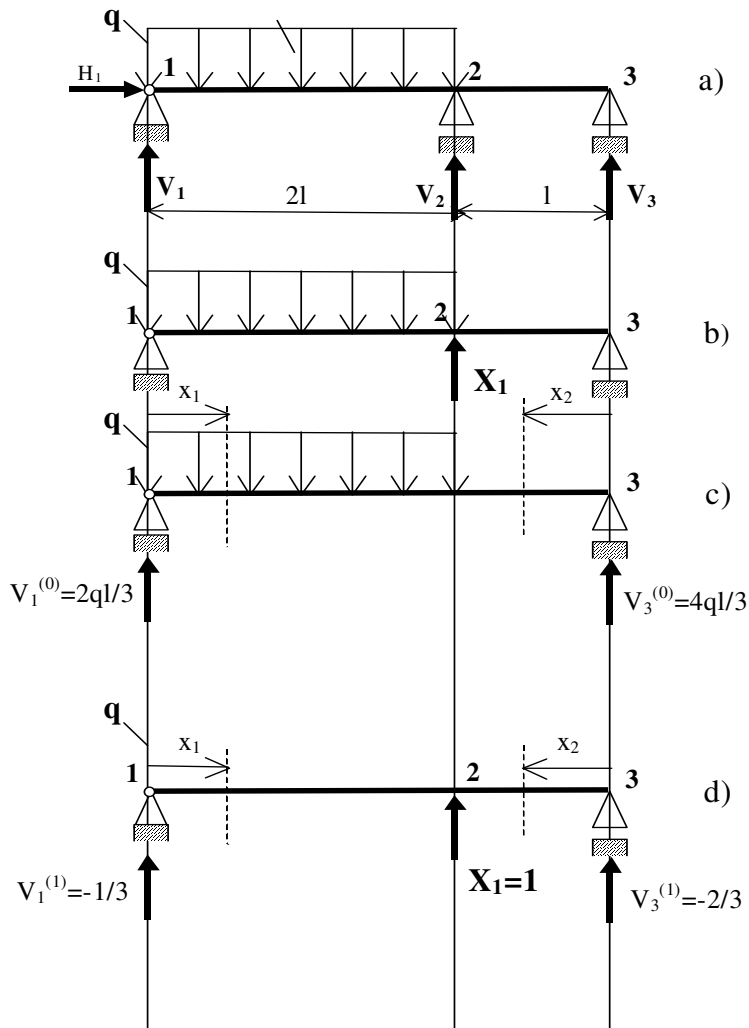


Figura 8.27

Sistemul de bază static determinat se obține pentru o grindă simplu static nedeterminată prin îndepărtarea unei singure legături. Se poate îndepărta, de exemplu, reazemul simplu **2** și reacțiunea din acest reazem se alege ca necunoscută static nedeterminată $X_I = V_2$ (figura 8.27b).

- *studierea sistemului de bază*

Se studiază sistemul de bază în două variante:

- încărcat numai cu *sarcinile reale* ($X_I = 0$) (figura 8.27c);

- încărcat numai cu $X_I = I$ (figura 8.27d).

Se calculează reacțiunile pentru aceste două grinzi fictive și se scriu momentele $M_0(x)$ (pentru încărcarea cu sarcini reale) și respectiv $m_1(x)$, pentru încărcarea cu $X_I = I$. Prin toate grinzile fictive studiate se fac aceleași secțiuni, chiar dacă numărul de regiuni nu este același.

Expresiile $M_0(x)$ și $m_1(x)$ sunt:

- în secțiunea x_1

$$M_0(x_1) = \frac{2}{3}qlx_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

$$m_1(x_1) = -\frac{x_1}{3}$$

- în secțiunea x_2 :

$$M_0(x_2) = \frac{4}{3}qlx_2$$

$$m_1(x_2) = -\frac{2x_2}{3}$$

Calculul coeficienților de influență

Coeficienții de influență din ecuația (8.174) se calculează din relațiile:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{2l} M_0(x_1)m_1(x_1)dx_1 + \int_0^l M_0(x_2)m_1(x_2)dx_2 \right] \quad (8.175)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{2l} m_1^2(x_1)dx_1 + \int_0^l m_1^2(x_2)dx_2 \right] \quad (8.176)$$

Înlocuind expresiile momentelor în *relațiile* (8.175) și (8.176) se obține:

$$\delta_{10} = -\frac{1}{3EI_z} \left[\int_0^{2l} \left(\frac{2}{3} qlx_1^2 - \frac{q}{2} x_1^3 \right) dx_1 + \frac{8}{3} ql \int_0^l x_2^2 dx_2 \right] \quad (8.177)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{9EI_z} \left[\int_0^{2l} x_1^2 dx_1 + 4 \int_0^l x_2^2 dx_2 \right] \quad (8.178)$$

Integrând, rezultă

$$\delta_{10} = -\frac{2}{9} \frac{ql^4}{EI_z}; \quad \delta_{11} = \frac{4}{9} \frac{ql^3}{EI_z} \quad (8.179)$$

- *calculul necunoscutelor*

Înlocuind (8.179) în (8.174) și rezolvând ecuația, rezultă:

$$X_1 = V_2 = \frac{1}{2} ql \quad (8.180)$$

Reacțiunile V_1 și V_3 se pot determina din ecuațiile de echilibru (8.164).

2) Se va aplica metoda eforturilor pentru a ridica nedeterminarea la grinda din *figura* 8.28.

- *scrierea ecuațiilor staticii*

Se figurează reacțiunilor, se scriu ecuațiile de echilibru și se stabilește gradul de nedeterminare:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y_i &= 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - F = 0 \\ \sum M_{(1)} &= 0 \Rightarrow M_1 + V_2 l + V_3 2l + V_4 3l - F \frac{7l}{2} = 0 \end{aligned} \quad (8.181)$$

Au rămas două ecuații de echilibru și cinci reacțiuni necunoscute. Gradul de nedeterminare este $GN = NR - NE = 5 - 2 = 3$, deci problema este triplu static nedeterminată.

- *fixarea necunoscutelor static nedeterminate și stabilirea sistemului de bază*

Gradul de nedeterminare fiind $GN = 3$, pentru obținerea sistemului de bază (static determinat) se vor înlătura un număr de trei legături (un număr de legături egal cu gradul de nedeterminare). Se pot îndepărta, de exemplu, cele trei reazeme simple, care vor fi înlocuite cu forțele:

$$X_1 = V_2; \quad X_2 = V_3; \quad X_3 = V_4 \quad (8.182)$$

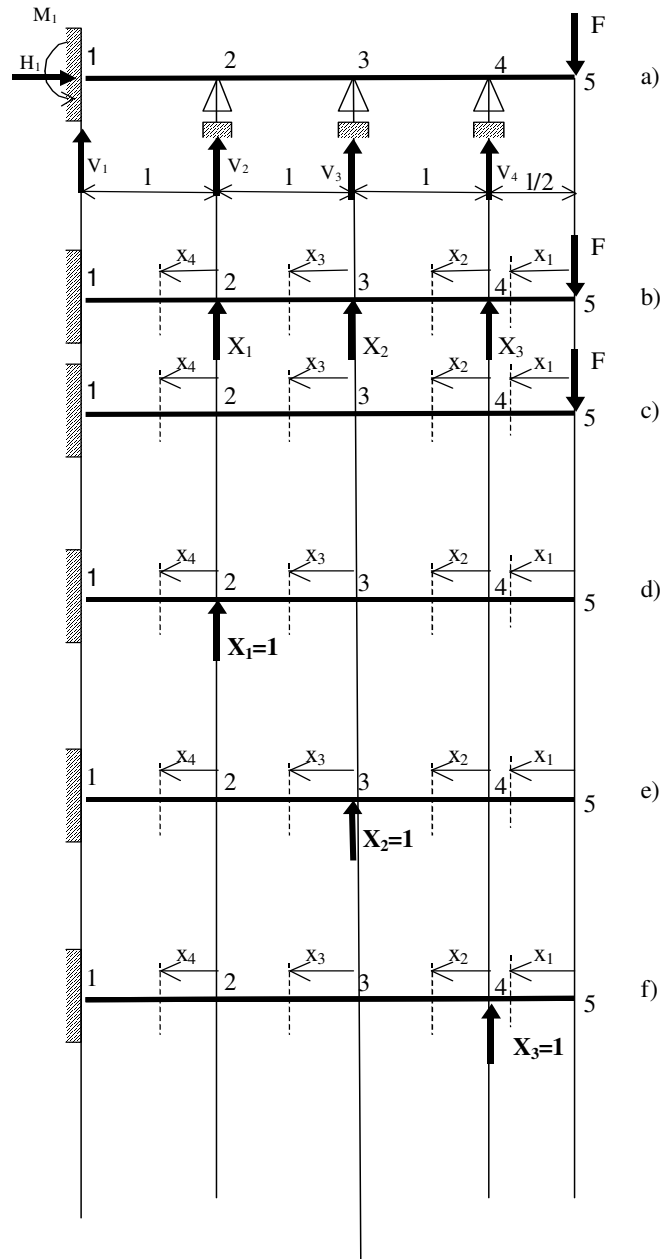


Figura 8.28

Sistemul de bază este prezentat în *figura 8.28b*. Sistemul de trei ecuații canonice cu trei necunoscute are următoarea formă:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} &= 0\end{aligned}\quad \text{cu } \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (8.183)$$

- *studiul sistemului de bază*

Numărul variantelor studiate este egal cu numărul indicilor diferiți ai coeficienților de influență δ_{ij} , din sistemul (8.183). În cazul prezentat coeficienții de influență din sistem au 4 indici distincți (0,1,2,3), și în consecință, sistemul de bază se studiază în următoarele 4 situații: încărcat numai cu sarcina F și respectiv numai cu $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, ca în *figurile 8.28c, d, e, f*. Expresiile momentelor $M_0(x_i)$ și $m_i(x_i)$ scrise pentru aceste sisteme sunt:

- în secțiunea x_1

$$M_0(x_1) = -Fx_1$$

$$m_1(x_1) = 0, \quad m_2(x_1) = 0, \quad m_3(x_1) = 0$$

- în secțiunea x_2 :

$$M_0(x_2) = -F\left(\frac{l}{2} + x_2\right)$$

$$m_1(x_2) = 0, \quad m_2(x_2) = 0, \quad m_3(x_2) = x_2$$

- în secțiunea x_3 :

$$M_0(x_3) = -F\left(\frac{3l}{2} + x_3\right)$$

$$m_1(x_3) = 0, \quad m_2(x_3) = x_3, \quad m_3(x_3) = l + x_3$$

- în secțiunea x_4 :

$$M_0(x_4) = -F\left(\frac{5l}{2} + x_4\right)$$

$$m_1(x_4) = x_4, \quad m_2(x_4) = l + x_4, \quad m_3(x_4) = 2l + x_4$$

Calculul coeficienților de influență

Coeficienții de influență δ_{ij} din sistemul (8.183) se calculează cu ajutorul următoarelor relații:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} M_0(x_1) m_1(x_1) dx_1 + \int_0^1 M_0(x_2) m_1(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^1 M_0(x_3) m_1(x_3) dx_3 + \int_0^1 M_0(x_4) m_1(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} M_0(x_1) m_2(x_1) dx_1 + \int_0^1 M_0(x_2) m_2(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^1 M_0(x_3) m_2(x_3) dx_3 + \int_0^1 M_0(x_4) m_2(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} M_0(x_1) m_3(x_1) dx_1 + \int_0^1 M_0(x_2) m_3(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^1 M_0(x_3) m_3(x_3) dx_3 + \int_0^1 M_0(x_4) m_3(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} m_1(x_1) m_2(x_1) dx_1 + \int_0^1 m_1(x_2) m_2(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^1 m_1(x_3) m_2(x_3) dx_3 + \int_0^1 m_1(x_4) m_2(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} m_1(x_1) m_3(x_1) dx_1 + \int_0^1 m_1(x_2) m_3(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^1 m_1(x_3) m_3(x_3) dx_3 + \int_0^1 m_1(x_4) m_3(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} m_2(x_1) m_3(x_1) dx_1 + \int_0^1 m_2(x_2) m_3(x_2) dx_2 + \right. \\ \left. + \int_0^1 m_2(x_3) m_3(x_3) dx_3 + \int_0^1 m_2(x_4) m_3(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} m_1^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 m_1^2(x_2) dx_2 + \int_0^1 m_1^2(x_3) dx_3 + \int_0^1 m_1^2(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} m_2^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 m_2^2(x_2) dx_2 + \int_0^1 m_2^2(x_3) dx_3 + \int_0^1 m_2^2(x_4) dx_4 \right]$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^{1/2} m_3^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 m_3^2(x_2) dx_2 + \int_0^1 m_3^2(x_3) dx_3 + \int_0^1 m_3^2(x_4) dx_4 \right]$$

Înlocuind expresiile momentelor de mai sus și integrând se obțin coeficienții de influență:

$$\delta_{10} = -\frac{F}{EI_z} \int_0^1 \left(\frac{5l}{2} + x_4 \right) x_4 dx_4 = -\frac{19 Fl^3}{12 EI_z}$$

$$\delta_{20} = -\frac{F}{EI_z} \left[\int_0^1 \left(\frac{3l}{2} + x_3 \right) x_3 dx_3 + \int_0^1 \left(\frac{5l}{2} + x_4 \right) (1 + x_4) dx_4 \right] = -\frac{17 Fl^3}{3 EI_z}$$

$$\delta_{30} = -\frac{F}{EI_z} \left[\int_0^1 \left(\frac{l}{2} + x_2 \right) x_2 dx_2 + \int_0^1 \left(\frac{3l}{2} + x_3 \right) (1 + x_3) dx_3 + \int_0^1 \left(\frac{5l}{2} + x_4 \right) (2l + x_4) dx_4 \right] = -\frac{45 Fl^3}{4 EI_z}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_z} \int_0^1 x_4 (1 + x_4) dx_4 = \frac{5 l^3}{6 EI_z}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EI_z} \int_0^1 x_4 (2l + x_4) dx_4 = \frac{4 l^3}{3 EI_z}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^1 x_3 (1 + x_3) dx_3 + \int_0^1 (1 + x_4) (2l + x_4) dx_4 \right] = \frac{14 l^3}{3 EI_z}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \int_0^1 x_4^2 dx_4 = \frac{1 l^3}{3 EI_z}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^1 x_3^2 dx_3 + \int_0^1 (1 + x_4)^2 dx_4 \right] = \frac{8 l^3}{3 EI_z}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI_z} \left[\int_0^1 x_2^2 dx_2 + \int_0^1 (1 + x_3)^2 dx_3 + \int_0^1 (2l + x_4)^2 dx_4 \right] = 9 \frac{l^3}{EI_z}$$

- *calculul necunoscutelor*

Înlocuind cei nouă coeficienți de influență în (8.183), se obține un sistem compatibil. Rezolvând sistemul, rezultă cele trei necunoscutele static nedeterminate alese inițial:

$$X_1 = V_2 = 0,48F; \quad X_2 = V_3 = 3,36F; \quad X_3 = V_4 = -1,03F \quad (8.184)$$

Reacțiunile V_I și M_I se determină apoi din ecuațiile de echilibru (8.181).

Bibliografie

1. Anghel A., - *Rezistența materialelor, partea 1-a*, Ed. Tehnică, București, 2001
2. Atanasiu, M. - *Metode analitice noi în Rezistența materialelor*, Ed. U.P.B. 1994
3. Babeu T., - *Rezistența materialelor*, vol.1, Universitatea Tehnică Timișoara, 1991
4. Buga, M., Iliescu, N., Atanasiu, C., Tudose, I. - *Probleme alese de Rezistența materialelor*, Ed. U.P.B. 1985
5. Baușic V. (coord.), - *Rezistența materialelor*, Inst. Politehnic-Iași, 1978
6. Bârsănescu P. D., - *Rezistența materialelor*, vol.1, Solicități simple, Ed. Gh.Asachi, Iași, 2001
7. Bia C., Ille V., Soare M.V., - *Rezistența mat. și Teoria elasticității*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1967
8. Buzdugan, Gh. - *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei, București 1986
9. Buzdugan, Gh. s.a. - *Culegere de probleme din Rezistența Materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1979.
10. Constantinescu, I., Dăneț, G.V. - *Metode noi pentru calcule de rezistență*, Ed.Tehnică, București 1989
11. Constantinescu, I.N., Piciu, R.C., Hadar,A., Gheorghiu, H. - *Rezistența materialelor pentru inginerie mecanică*, Ed. BREN, București 2006
12. Crețu, A. - *Probleme alese din Rezistența materialelor*, Ed. Mediamira, Cluj- Napoca 2001.
13. Crețu, A. - *Tensiuni, Stress, Contraintes*, Ed. UT Cluj-Napoca 1993
14. Curtu I., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Univ. Brașov, 1988

15. Curtu I., Ciofoaia M., Baba M., Cerbu C., Repanovici A., Sperchez F., - *Rezistența materialelor*, Probleme IV, Ed. Infomarket, Brașov, 2005
16. Deutsch I., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979
17. Deutsch I., Goia I., Curtu I., Neamțu T., Sperchez Fl., - *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
18. Deutsch, I. s.a. - *Probleme din rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1986
19. Drobotă, V. - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1982
20. Dumitru I., Faur N., - *Elemente de calcul și aplicații în rezistența materialelor*, Ed. Politehnică, Timișoara, 1999
21. Dumitru I., Neguț N., - *Elemente de Elasticitate, Plasticitate și Rezistența Materialelor*, vol. I, Ed. Politehnică, Timișoara, 2003
22. Gheorghiu, H., Hadar, A., Constantin, N. - *Analiza structurilor din materiale izotrope și anizotrope*, Editura Printech, București 1998
23. Goia I., - *Rezistența materialelor*, vol. 1, ediția a 3-a, Editura Transilvania, Brașov, 2000
24. Horbaniuc D., - *Rezistența materialelor*, vol. 1, Inst. Politehnic-Iași, 1979
25. Horbaniuc D. (coord.), - *Rezistența mat. Elasticitate. Probleme*, Ed. „Gh. Asachi”, Iași, 1993
26. Ispas, B., Constantinescu E., Alexandrescu, I. - *Rezistența materialelor. Culegere de probleme*, Ed Tehnică, București 1997.
27. Iliescu, N., Jiga, G., Hadar A. - *Teste grilă de Rezistența materialelor*. Ed. PRINTECH, București 2000
28. Marin, C - *Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității*, Editura BIBLIOTHECA, Târgoviște 2006.

29. Mocanu D.R., - *Inercarea materialelor*, vol. 1-3, Ed. Tehnică, București, 1982
30. Mocanu D.R., - *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică, București, 1980
31. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, Ed. CERMI, Iași, 1998
32. Mocanu F., - *Rezistența materialelor*, vol1, Ed. TEHNOPRESS, Iași, 2006
33. Ponomariov S.D. ș.a., - *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1964
34. Ponomariov S.D. ș.a., - *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, Ed. Tehnică, București, 1967
35. Posea, N. s.a. - *Rezistența materialelor. Probleme*, Ed. Științifică și Enciclopedică București 1986
36. Radu, Gh., Munteanu, M - *Rezistența materielelor și elemente de Teoria Elasticității*, Vol. 2. Ed. MACARIE, Târgoviște 1994
37. Timoshenko, S.P. - *Teoria stabilității elastice*. Ed. Tehnică, București 1967
38. Tripa M., - *Rezistența materialelor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1967
39. Tudose I, Constantinescu D.M., Stoica, M. - *Rezistența materialelor. Aplicații*, Ed. Tehnică, București 1990
40. Voinea R., Voiculescu D., Simion P.F., - *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Ed. Academiei, București, 1989